

**Iñigo Quilez**

2002



# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>3</b>
<b>2. CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO DE MANDELBROT.....</b>	<b>4</b>
2.1. CONJUNTOS DE JULIA.....	4
2.2. EL CONJUNTO DE MANDELBROT.....	5
2.3. OBSERVACIONES.....	7
<b>3. EL CONJUNTO DE MANDELBROT ES SIMÉTRICO RESPECTO AL EJE REAL .....</b>	<b>9</b>
<b>4. TEOREMA DE LOS BULBOS .....</b>	<b>11</b>
4.1. OBJETIVO .....	11
4.2. PROCEDIMIENTO.....	12
4.3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA (I).....	14
4.4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA (II).....	15
4.5. APLICACIÓN DEL TEOREMA.....	17
4.5.1. <i>Caso N=1</i> .....	17
4.5.2. <i>Caso N=2</i> .....	20
4.5.3. <i>Caso N=3</i> .....	23
<b>5. LOS POLINOMIOS <math>Q_N</math> .....</b>	<b>25</b>
5.1. DEFINICIÓN DE "CENTRO" DE LOS BULBOS .....	25
5.2. APLICACIÓN DE LOS POLINOMIOS $Q_N$ PARA UNA N DADA.....	29
5.3. APLICACIÓN DE LOS POLINOMIOS $Q_{N_r}$ PARA CUALQUIER N.....	31
<b>6. LOS POLINOMIOS P Y LA ECUACIÓN LOGÍSTICA.....</b>	<b>33</b>
6.1. EL EJE REAL DEL CONJUNTO DE MANDELBROT .....	33
6.2. POLINOMIOS P.....	36
6.3. POLINOMIOS P Y LA ECUACIÓN LOGÍSTICA.....	37
6.4. LOS CAMINOS DE P SOBRE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA .....	39
6.5. ALGO MÁS SOBRE LOS POLINOMIOS P.....	41
<b>7. DEMOSTRACIONES DEL BULBO <math>N=1</math> .....</b>	<b>42</b>
7.1. DEMOSTRACIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE Z Y $C_{L1}$ .....	42
7.2. OBSERVACIÓN DE LOS PUNTOS DE TANGENCIA $C_{T1N}$ .....	43
<b>8. CONCLUSIONES .....</b>	<b>45</b>
<b>9. REFERENCIAS.....</b>	<b>46</b>

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se hará una descripción de algunas de las características más importantes del conjunto de Mandelbrot. Tal descripción consistirá sobre todo en un análisis de la dinámica subyacente al conjunto de la cual deduciremos parte de su geometría. Este paso "de la dinámica a la geometría", que da nombre al trabajo, resulta natural en un objeto matemático como el que estudiamos, puesto que la definición de su geometría está dado en términos de un sistema dinámico discreto no lineal. Tal sistema, como casi todos los sistemas con estas características, se comporta de forma caótica en determinadas zonas, lo que origina una geometría de estructura fractal.

El presente trabajo está basado, como casi la totalidad de los artículos sobre el tema, en la pura observación experimental del conjunto estudiado. Sabido es que en la única manera (o cuanto menos la mejor manera) de describir los objetos de geometría fractal y la teoría del caos es, aún hoy en día, la basada en la mera observación. En nuestro caso, que trabajamos con el objeto rey de la geometría fractal, no podía ser de otra manera. Como bien describió James Cleick en su libro "Caos", "el conjunto de Mandelbrot no admite atajos, a diferencia de las figuras geométricas tradicionales,... El único método de saber qué clase de figura corresponde a una ecuación determinada es proceder por tanteo" [1]. No obstante, con el atrevimiento que caracteriza al ingenio, en este trabajo intentaremos encontrar alguno de esos inexistentes atajos, con el fin de tener una descripción más tradicional del conjunto de Mandelbrot. Eso sí, no por eso dejaremos de temer al gran monstruo, que con su infinita belleza sigue siendo el animal que más tiempo constará domesticar a los matemáticos.

Así, como prefacio a la labor de deducción matemática que sostiene este trabajo, el capítulo segundo consiste en un ejercicio de matemática experimental, que nos abrirá las puertas a conceptos e ideas que en sucesivos capítulos demostraremos formalmente. Estos mismos conceptos teóricos nos llevarán a acabar descubriendo en el penúltimo capítulo nuevos dilemas sobre el conjunto de Mandelbrot.

En cualquier caso, a lo largo del trabajo, no se ha dudado en "echar mano" de la ayuda del ordenador para resolver determinadas dudas o resolver de manera parcial ciertos puntos dudosos. Es evidente, filosóficamente hablando, que a nivel matemático el tanteo por ordenador es incapaz de demostrar nada, tal y como las matemáticas adoptan el término "demostrar". Sin embargo, siendo una mucho mejor herramienta que el papel y el lápiz, el ordenador puede orientar al matemático sobre la dirección en la que debe mirar y qué cosas debe intentar demostrar. En el mismo sentido, un matemático puede temporalmente dejar un cabo suelto en su cadena deductiva para poder continuar con ella, para, más adelante, atacarla con el fin de consolidar su teoría completa, si el ordenador "muestra" que tal cabo es como el matemático espera poder demostrar que es. Así, siguiendo la corriente de esta filosofía práctica, en este trabajo de investigación el ordenador ha jugado tanto este papel de "indicador" como de "corroborador" de ideas, además del papel de "pintor" de las ilustraciones presentadas a lo largo del mismo.

## 2. CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO DE MANDELBROT

En los dos primeros apartados de este capítulo se hará una brevísima descripción de lo que es el conjunto de Mandelbrot. Para mayor información consúltese la bibliografía. A partir del tercer apartado, se comenzará con el trabajo de investigación en sí, explicándose de manera cualitativa nada más, como ya se dijo, los conceptos básicos que en subsiguientes capítulos se utilizarán.

### 2.1. Conjuntos de Julia

Como se sabe, el conjunto de Mandelbrot nació en 1979 gracias al ya famoso matemático polaco con el objeto de catalogar los conjuntos de Julia estudiados por Fatou y Julia en la segunda década del siglo XX, si bien el propio conjunto en sí se ha convertido en objeto de estudio hoy en día [2].

Sólo a modo de resumen, se puede decir que la aplicación estudiada por Julia y Fatou

$$Z \rightarrow Z^2 + C$$

definida en el plano complejo  $Z$  consiste en un sistema dinámico que transforma cada punto inicial del plano  $Z$  en otros sucesivos según la aplicación es iterada. Algunos puntos se alejan del centro de coordenadas al infinito, mientras que otros comienzan a oscilar periódica o caóticamente más o menos cerca del mismo. Ambas actitudes definen en el plano regiones de puntos periódicos y regiones de puntos divergentes. El límite entre ambos tipos de regiones constituyen el Conjunto de Julia, y depende fuertemente de la constante  $C$ . Los conjuntos de Julia presentan una extraordinaria complejidad geométrica y salvo para  $C=0$ , caso en el que el conjunto es la circunferencia de radio unidad, las figuras que los representan son tan bellas como las mostradas en la figura 2.1:

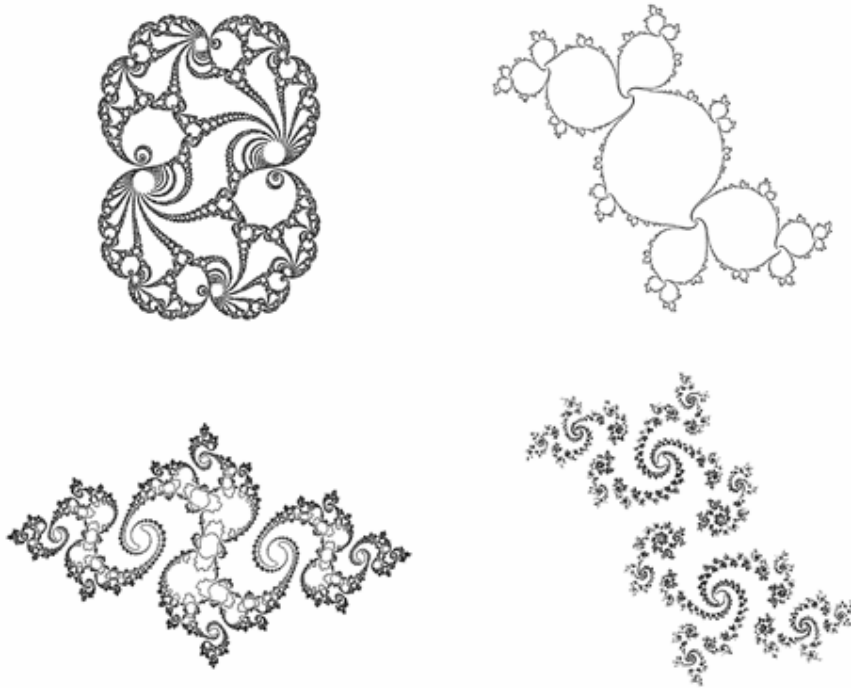


Figura 2.1

En un intento por catalogar la infinita variedad de conjuntos de Julia posibles, se puede adoptar el siguiente criterio: los conjuntos de Julia forman parte de dos grupos posibles, uno formado por aquellos conjuntos de Julia "de una única pieza" (o conjunto compacto) y el otro formado por los que se componen de una infinidad de islas inconexas (o nube de Cantor). De los cuatro conjuntos de la figura 2.1 tan sólo el inferior derecho pertenece a este segundo grupo, mientras que el resto pertenecen al primero, a pesar de que el superior izquierdo es tan frágil que está a punto de despedazarse en infinitos fragmentos y pasar a formar parte del segundo grupo.

Se puede demostrar que es posible conocer fácilmente a cual de estos dos grupos pertenece un conjunto de Julia sin más que realizar la iteración  $Z \rightarrow Z^2 + C$  en el punto 0, que es el punto crítico de la transformación, y ver si dicho punto escapa al infinito o no. En caso de hacerlo, el conjunto de Julia será inconexo, mientras que en caso contrario el conjunto se mantendrá sólidamente unido en una única pieza.

## 2.2. El conjunto de Mandelbrot

Benoît Mandelbrot decidió marcar sobre el plano  $C$  aquellos puntos que originaban conjuntos de Julia conexos (de una sola pieza). Para cada  $C$  del plano calculó la iteración definida para los conjuntos de Julia con el valor inicial  $Z_0=0$  y marcó aquellos puntos que no escapaban al infinito. El conjunto de tales puntos forman el conjunto de Mandelbrot. Su definición formal es:

$$M(C) = \left\{ c \in C \mid \left\{ f_c^n(0) \right\}_{n=1}^{\infty} \neq \infty \right\}$$

El conjunto de Mandelbrot, resultado de aplicar dicha definición, resulta también, como los conjuntos de Julia, extremadamente complicado, como se muestra en la figura 2.2:

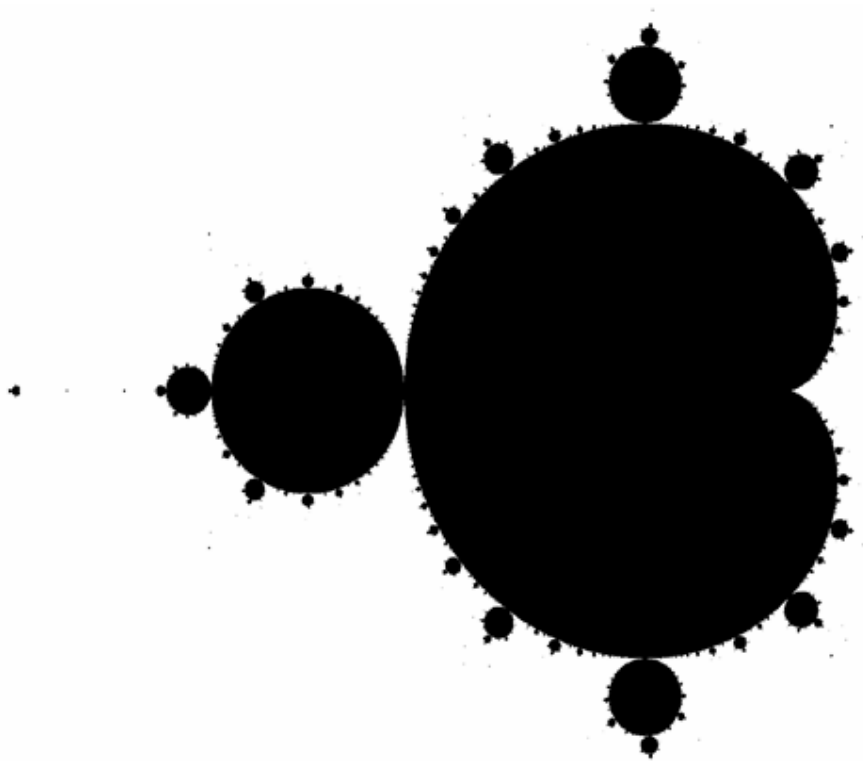


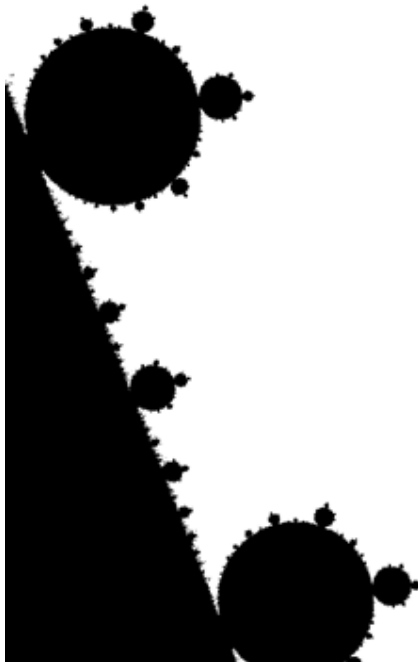
Figura 2.2

Su contorno es increíblemente complicado y está aún en estudio [3][4] desde el mismo día en que Mandelbrot lo pudo observar en el monitor de su ordenador. Un ejemplo es el siguiente:



*Figura 2.3*

Su contorno fractal está lleno de espirales, zig-zags, caballitos de mar y bucles [5]. Sin embargo, el conjunto está formado realmente por una infinidad de discos que se agrupan en una cascada de dimensiones cada vez menores. La figura 2.3 representa puntos "equidistantes" al conjunto. He aquí el "verdadero" aspecto de  $M$  para la misma posición que la figura 2.3:



*Figura 2.4*

### 2.3. Observaciones

Puesto que el conjunto de Mandelbrot está constituido por los puntos del plano  $C$  para los cuales el sistema dinámico

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

$$Z_0 = 0$$

se comporta de manera no divergente, cabe preguntarse en qué consiste esa "no divergencia". Al contrario de lo que en la mayoría de los libros de texto universitarios se nos pretende hacer creer, "no divergencia" no equivale a "convergencia". Los comportamientos posibles son más ricos que estas dos simples posiciones extremas, aunque tal vez se intenten ocultar a los alumnos por la falta de herramientas matemáticas que existen para tratarlos. La teoría del caos, una de las más jóvenes corrientes matemáticas junto con la geometría fractal, tiene respuesta para tales comportamientos, y ejemplo de ello es que el conjunto de Mandelbrot, símbolo de ambas teorías, que es rico en tales comportamientos. Dichos comportamientos son el movimiento periódico y el caótico. Éste último, sin duda el más sorprendente, permite a un sistema dinámico pasar por una infinidad de estados saltando de uno a otro sin orden alguno y sin divergir jamás.

Así, el conjunto de Mandelbrot, por definición, está formado por puntos que generan secuencias de valores convergentes, periódicas o caóticas. En general, sin embargo, sin entrar demasiado en disertaciones filosóficas, podemos "agrupar" los tres comportamientos en uno, conviniendo en que todos ellos son periódicos. Siendo así, el comportamiento convergente se trataría de un comportamiento periódico de período 1, mientras que el comportamiento caótico podría ser un comportamiento de período infinito, en el que, en la práctica, jamás se vuelve a pasar dos veces por un mismo estado.

En la figura 2.5 se pueden observar el comportamiento de los puntos de la secuencia resultado de la iteración anterior para el caso de dos valores de  $C$  que generan secuencias que se vuelven periódicas. En el dibujo de la izquierda se observa un comportamiento periódico de período igual a 3, mientras que en el de la derecha la secuencia converge a un ciclo de período igual a 5:

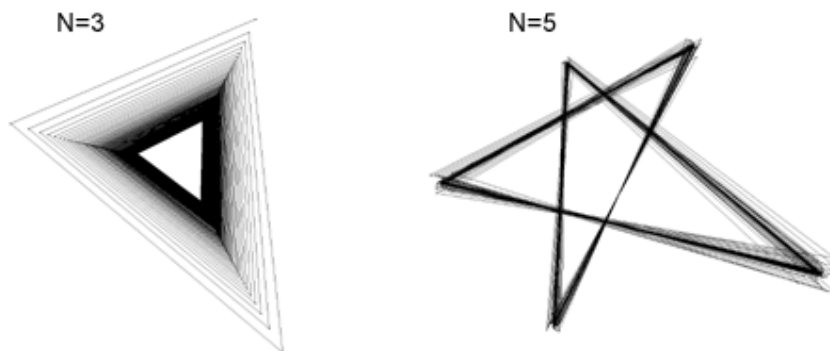


Figura 2.5

Un primer estudio del conjunto de Mandelbrot consiste, pues, en determinar cuales de sus puntos originan secuencias periódicas de determinado período. De las figuras 2.2 y 2.4, así como de cualquier viaje que uno realice por el conjunto de Mandelbrot a bordo de un ordenador, surge la tentación de afirmar que éste está formado por una infinidad de "bulbos" circulares que, pegados unos a otros por frágiles puntos de tangencia manteniendo la cohesión del conjunto, se encadenan de forma fractal hasta allí donde la precisión del ordenador es capaz de llevarnos. Por otra parte, unidos por infinitamente delgados hilos de bulbos, aparecen

de vez en cuando "copias" del conjunto de Mandelbrot completo con sus respectivos racimos infinitos de bulbos.

Resulta, como se describirá ahora, que los puntos de comportamientos periódicos de mismo período se agolpan en estos bulbos, de tal manera que todos los puntos interiores a cierto bulbo generan comportamientos periódicos de un determinado período, que puede interpretarse como la "firma" del bulbo.

Este hecho se comprueba fácilmente mediante un programa de ordenador que computa para cada punto del conjunto de Mandelbrot el período de la secuencia de valores generados a partir del sistema dinámico generado para tal punto. La figura 2.6 muestra el resultado de tal experimento, en la cual se ha marcado con un color diferente los puntos que originan secuencias periódicas del mismo período, tal y como indica la leyenda:

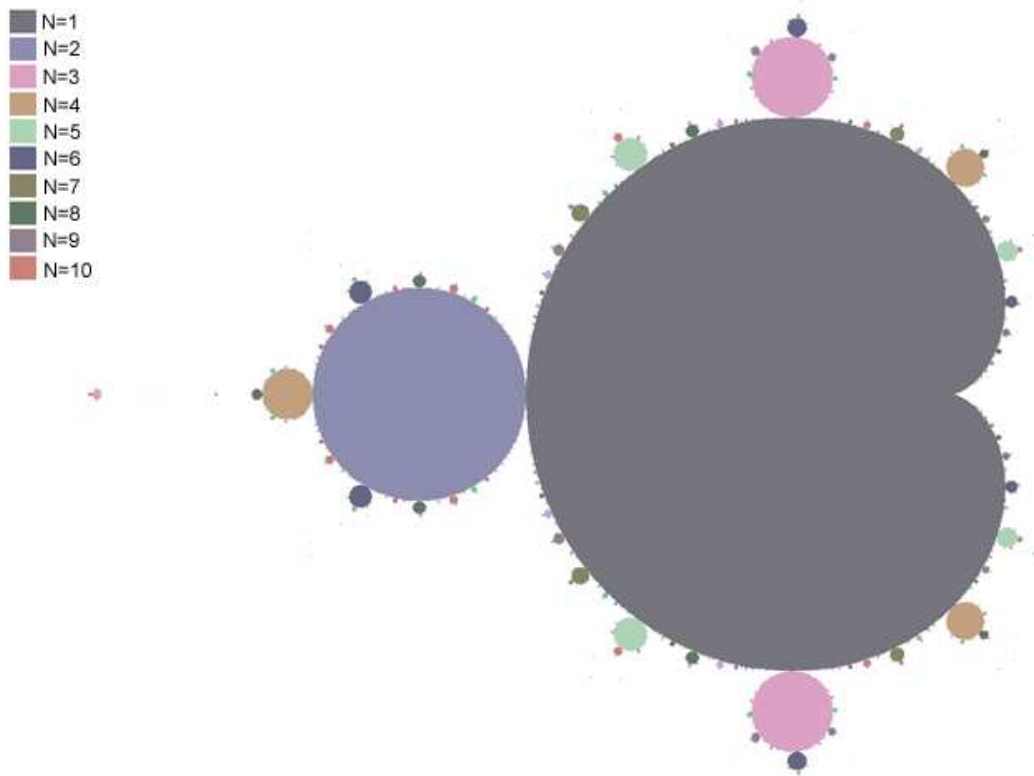


Figura 2.6

Lo primero que llama la atención de esta figura es que parece claro que pueden existir varios bulbos del mismo período. Por ejemplo, para el caso de período 3 ( $N=3$ ) se observan dos grandes bulbos colocados encima y debajo respectivamente del gran cuerpo gris del conjunto. Si nos fijamos un poco más, vemos otro bulbo de  $N=3$  a la izquierda del conjunto de tamaño pequeño. Así mismo, a simple vista (a esta escala de representación) podemos observar 3 bulbos de  $N=4$  y al menos 6 bulbos de  $N=5$ , si bien tan sólo parece haber un bulbo de  $N=1$  (puntos de convergencia) y otros de  $N=2$ .

El cálculo preciso del número de bulbos existentes repartidos por la infinita estructura fractal del conjunto de Mandelbrot es parte de unos de los capítulos de este trabajo, y nos llevará a deducir una fórmula exacta para calcular dicho número en función de  $N$ .



### 3. EL CONJUNTO DE MANDELBROT ES SIMÉTRICO RESPECTO AL EJE REAL

El resultado de esta sencilla demostración nos será de utilidad en las sucesivas demostraciones, y corrobora matemáticamente el hecho experimental de que el conjunto de Mandelbrot parece ser simétrico respecto al eje real.

Tal y como está definido, el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de puntos del plano  $C$  para los cuales la iteración

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= Z_n^2 + C \\ Z_0 &= 0 \end{aligned}$$

no diverge en el sentido de que el módulo de  $Z_n$  no escapa a infinito. El comportamiento de la iteración está totalmente definido por  $C$ , siendo los valores  $Z_n$  dependientes tan sólo de  $C$ . De hecho, la dependencia de  $Z_n$  puede expresarse mediante un polinomio en  $C$  cuyo grado va creciendo al aumentar el número de iteraciones ( $n$ ).

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0 \\ Z_1 &= C \\ Z_2 &= C^2 + C \\ Z_3 &= C^4 + 2C^3 + C^2 + C \\ &\dots \end{aligned}$$

Para algunos valores de  $C$  los polinomios (su módulo) alcanzarán valores crecientes al aumentar el número de iteraciones ( $n$ ) sin límite alguno, mientras que otros se estancarán. Por definición del conjunto, se dice que estos puntos son los que pertenecen al conjunto de Mandelbrot.

Queremos demostrar que el conjunto de Mandelbrot es simétrico respecto al eje real (a partir de ahora cuando se diga "simétrico" se sobreentenderá que es respecto al eje real). Según lo visto, esto equivale a que  $Z_n$  tenga el mismo módulo tanto para un  $C$  determinada como para su conjugada. Es decir, se cual sea " $n$ ", el módulo del polinomio generado deberá comportarse de la misma forma para a  $C$  y  $C^*$ .

En general  $Z_n$  y  $C$  tendrán una parte real y una imaginaria:

$$\begin{aligned} Z_n &= x_n(C) + jy_n(C) \\ C &= a + jb \end{aligned}$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} x_n(C) &= x_n(C^*) \\ y_n(C) &= -y_n(C^*) \end{aligned}$$

de tal manera que  $|Z_n|$  es simétrica, ya que

$$\begin{aligned} Z_n(C) &= x_n(C) + jy_n(C) \\ Z_n(C^*) &= x_n(C^*) + jy_n(C^*) = x_n(C) - jy_n(C) \end{aligned}$$

y por tanto:

$$|Z_n(C^*)|^2 = x_n^2(C^*) + y_n^2(C^*) = |Z_n(C)|^2$$

Miremos ahora, con estas condiciones, qué ocurre a  $Z_{n+1}$ :

$$Z_{n+1}(C) = \begin{cases} x_{n+1}(C) = x_n(C)^2 - y_n(C)^2 + a \\ y_{n+1}(C) = 2 \cdot x_n(C) \cdot y_n(C) + b \end{cases}$$

y

$$Z_{n+1}(C^*) = \begin{cases} x_{n+1}(C^*) = x_n(C^*)^2 - y_n(C^*)^2 + a = x_n(C)^2 - y_n(C)^2 + a = x_{n+1}(C) \\ y_{n+1}(C^*) = 2 \cdot x_n(C^*) \cdot y_n(C^*) + b = -2 \cdot x_n(C) \cdot y_n(C) - b = -y_{n+1}(C) \end{cases}$$

con lo que demostramos que

$$\begin{aligned} x_n(C) = x_n(C^*) &\Rightarrow x_{n+1}(C) = x_{n+1}(C^*) \\ y_n(C) = -y_n(C^*) &\Rightarrow y_{n+1}(C) = -y_{n+1}(C^*) \end{aligned}$$

Es decir, si  $|Z_n|$  es simétrico, entonces  $|Z_{n+1}|$  también lo será.

Puesto que es evidente que para  $Z_1$  se cumple que  $x_1(C)=a=x_1(C^*)$  y que  $y_1(C)=b=-y_1(C^*)$ , entonces queda demostrado que  $|Z_n|$  es simétrico para todo  $n$ .

Puesto que el conjunto de Mandelbrot depende del comportamiento de  $|Z_n|$  cuando  $n$  tiende a infinito, queda demostrado que  $M$  es simétrico respecto al eje real. Es decir

$$\boxed{M(C) = M(C^*)}$$

## 4. TEOREMA DE LOS BULBOS

### 4.1. Objetivo

La pretensión inicial con que partimos en este apartado es la de obtener un método analítico que permita determinar qué puntos del plano  $C$  pertenecen al conjunto de Mandelbrot, que equivale a determinar dónde se sitúan sus bulbos. Puesto que el límite de este conjunto es caótico y sólo determinable en principio mediante "tanteo", la búsqueda que comenzamos aquí tan sólo pretende realizar un acercamiento a dicho conjunto. Esta búsqueda nos dará valiosa información sobre el mismo.

El objetivo último es determinar las regiones del plano  $C$  que pertenecen al conjunto de Mandelbrot, o lo que es lo mismo, las regiones del plano  $C$  que bajo la iteración

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

con

$$Z_0 = 0$$

terminen convergiendo a órbitas periódicas o caóticas. Como se dijo, podemos considerar la convergencia ordinaria como un caso particular de la convergencia periódica con período igual a uno, y el caso del comportamiento caótico como un caso extremo de convergencia periódica de período infinito.

En esta situación tenemos que estudiar la secuencia de valores generada por dicha iteración, que también representaremos como

$$Z_{n+1} = f_c(Z_n), Z_0 = 0$$

siendo

$$f_c(Z) = Z^2 + C$$

de modo que

$$Z_i = f_c^i(Z_0)$$

y que genera una secuencia de valores  $Z_n = \{ Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n \}$ .

Para que la secuencia de valores arrojados por la iteración converja a una órbita periódica hace falta que exista una "N" tal que para cierta iteración "i"-ésima

$$Z_i = Z_{i+N}$$

es decir que

$$f_c(f_c(f_c(\dots f_c(Z_i)\dots))) = f_c^N(Z_i) = Z_i$$

Así, la sub-secuencia  $\{ Z_i, f_c(Z_i), f_c^2(Z_i), \dots, f_c^{N-1}(Z_i) \} = \{ Z_i, Z_{i+1}, Z_{i+2}, \dots, Z_{i+N-1} \}$  forma la órbita de período N que buscamos. Se dice que estos N puntos son puntos periódicos por pertenecer a la órbita periódica. En el caso de  $N=1$ , el punto recibiría el nombre de "punto fijo". La secuencia

completa  $Z_n$  se dice que es "cuasi-periódica" porque tiende a la órbita periódica, "cayendo" completamente en ella a partir de la iteración "i"-ésima.

Una vez que se cumpla esta condición, es decir, una vez que un valor de la secuencia ( $Z_{i+N}$ ) repita un valor previo de la propia secuencia ( $Z_i$ ), la órbita será periódica para el resto de las iteraciones. Evidentemente, un sistema ( $f_c$  en este caso) que pasa por un estado ( $Z_{i+N}$ ) por el que ya pasó anteriormente ( $Z_i$ ), habrá de pasar un número infinito de veces más por tal estado.

Un ejemplo hipotético permite visualizar con mayor facilidad la situación que estamos describiendo:

$$\begin{aligned} Z_n &= \{ 0, f_c(0), f_c^2(0), f_c^3(0), f_c^4(0), f_c^5(0), f_c^6(0), f_c^7(0) \dots \} = \\ &\{ Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7 \dots \} = \\ &\{ Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_3, Z_4 \dots \} = \end{aligned}$$

que gráficamente queda como sigue:

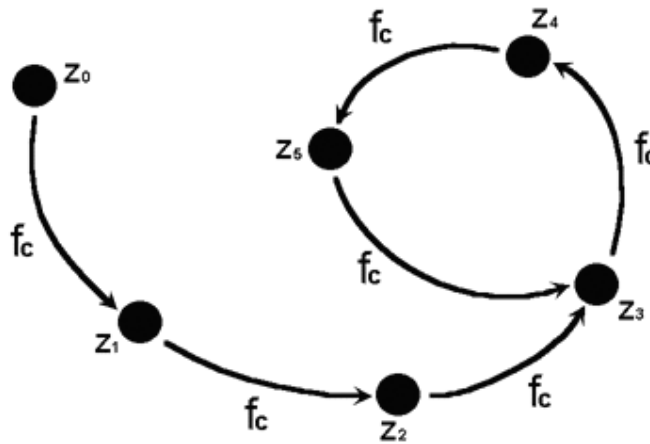


Figura 4.1

## 4.2. Procedimiento

Para nuestra búsqueda aprovechamos que conocemos la condición que una secuencia de iteraciones de la forma  $x = g(x)$  debe cumplir, para que converja a algún valor (llamado punto fijo de la iteración). Esta condición, válida cuando  $g(x)$  es continua en el intervalo de valores posibles de "x", viene dada por el "teorema del punto fijo":

$$|g'(x)| \leq 1, \forall x$$

Los puntos "x" que cumplen la desigualdad están dentro de la región de convergencia de la aplicación "g", siendo el límite de la misma aquellos puntos que cumplen la igualdad.

Para poder utilizar este teorema en nuestra búsqueda de los puntos C que bajo " $f_c$ " provocan órbitas periódicas echamos mano de la siguiente observación:

Supongamos una órbita de período N bajo la transformación " $f_c$ ":

$$\{ \dots, Z_i, f_c(Z_i), f_c^2(Z_i), \dots, f_c^{N-1}(Z_i), f_c^N(Z_i) = Z_i, \dots \}$$

Entonces, la secuencia formada por la aplicación de " $f_c$ " N veces por cada iteración forma una secuencia constante de valor  $Z_i$ . Es decir, la secuencia resultante de aplicar " $f_c^N$ " sobre cualquiera de los N puntos forma la secuencia constante. La figura 4.2 recoge esta observación, para el caso de  $N=3$ :

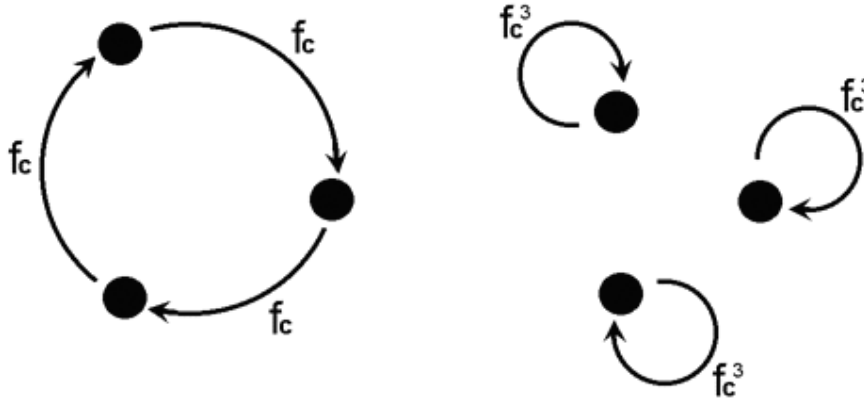


Figura 4.2

De manera análoga, una secuencia que bajo " $f_c$ " converge a una órbita periódica de período N, ha de ser convergente en el sentido ordinario bajo la aplicación de " $f_c^N$ ". Evidentemente, podremos construir N secuencias de este estilo, las cuales convergerán a cada uno de los puntos que formaban la órbita de la secuencia original, que son, por tanto, puntos fijo de la transformación " $f_c^N$ ". La figura 4.3 muestra esta idea para  $N=2$ :

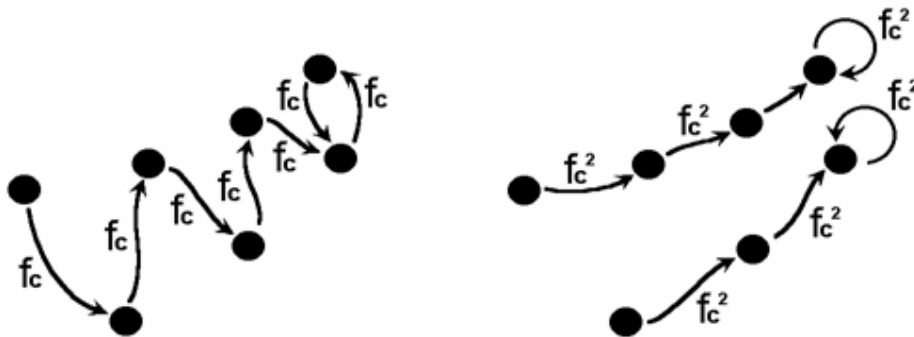


Figura 4.3

De modo que si, mediante el teorema del punto fijo, encontramos la región para la cual alguna de estas secuencias generadas mediante " $f_c^N$ " converge, estaremos obteniendo las regiones para las cuales la iteración de " $f_c$ " genera órbitas periódicas de período N, que es precisamente lo que buscamos.

### 4.3. Demostración del teorema (I)

Como se explicó, fijamos una  $N$ , formamos las aplicación  $f_c^N$  y buscamos su condición de convergencia:

$$\begin{aligned} f_c(Z) &= Z^2 + C \\ f_c^2(Z) &= (f_c(Z))^2 + C \\ &\dots \\ f_c^N(Z) &= (f_c^{N-1}(Z))^2 + C \end{aligned}$$

Para que " $Z = f_c^N(Z)$ " converja se debe cumplir la condición del teorema del punto fijo, de modo que

$$\left| f_c^{N'}(Z) \right| \leq 1, \forall Z$$

Para lo cual necesitamos calcular la derivada de la aplicación. Lo hacemos recursivamente a partir de la forma general de la derivada de " $f_c^n$ ":

$$f_c^{n'}(Z) = 2 \cdot f_c^{n-1}(Z) \cdot f_c^{n-1'}(Z)$$

de modo que

$$\begin{aligned} f_c^{N'}(Z) &= 2 \cdot f_c^{N-1}(Z) \cdot f_c^{N-1'}(Z) = \\ &2 \cdot f_c^{N-1}(Z) \cdot 2 \cdot f_c^{N-2}(Z) \cdot f_c^{N-2'}(Z) = \\ &\dots \\ &2^N \cdot f_c^{N-1}(Z) \cdot f_c^{N-2}(Z) \cdot \dots \cdot f_c^1(Z) \cdot Z \end{aligned}$$

Para que la condición del teorema se cumpla,  $Z$  ha de ser un punto de la región de convergencia, es decir, ha de ser uno de los puntos de la órbita periódica de " $f_c$ ". Así, teniendo en cuenta que los " $f_c^1(Z)$ ", " $f_c^2(Z)$ " y sucesivos valores hasta " $f_c^{N-1}(Z)$ " no son sino los siguientes  $N-1$  puntos de la órbita periódica, podemos reescribir el resultado anterior como:

$$\frac{df_c^N(Z)}{dZ} = 2^N \cdot \prod_{i=1}^N Z_{pi}$$

siendo las  $Z_{pi}$  los puntos de la órbita periódica.

De modo que, aplicando en este punto el teorema del punto fijo, tenemos que:

$$\left| 2^N \cdot \prod_{i=1}^N Z_{pi} \right| \leq 1$$

de donde

$$\left| \prod_{i=1}^N Z_{pi} \right| \leq \frac{1}{2^N}$$

donde los " $Z_{pi}$ " son los  $N$  puntos de la órbita periódica asociada a " $f_c$ ". Como consecuencia del teorema del punto fijo, la desigualdad del teorema de los bulbos se cumplirá para el interior de las regiones de convergencia y la igualdad para sus límites. Todos los puntos  $C$  que generan una " $f_c$ " para la que no se cumpla el teorema demostrado, no generarán secuencias convergentes a órbitas periódicas y por tanto no pertenecerán a ninguno de los bulbos del conjunto de Mandelbrot.

$$C \subset M(C) \Rightarrow \left| \prod_{i=1}^N Z_{pi} \right| \leq \frac{1}{2^N}$$

#### 4.4. Demostración del teorema (II)

También se puede demostrar esta propiedad que cumplen las regiones periódicas del conjunto de Mandelbrot (sus bulbos) mediante el uso del exponente de Lyapunov " $\lambda$ ", muy utilizado para el estudio de sistemas dinámicos discretos caóticos [6][7]. Este exponente se define como:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{xi}$$

Este exponente, claro indicador del caos, toma valores menores que cero para las zonas en las que la órbita de las " $X_i$ " no diverge.

Para nuestro propósito, describiremos  $\lambda$  como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{xi}} \right)$$

En el caso particular que nos atañe, en el que " $f(x) = f_c(Z)$ ", tenemos que

$$f'(x) = f'_c(Z) = \frac{d(Z^2 + C)}{dZ} = 2Z$$

de modo que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |2Z_i|} \right)$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 2 \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |Z_i|} \right)$$

que debería tomarse para infinitas  $Z_i$  resultado de la iteración  $Z^2+C$ , desde  $Z_1$  hasta  $Z_\infty$ .

Supongamos ahora que las  $Z_i$  pertenecen a una secuencia que tiende a una órbita periódica (estamos suponiendo que la "f<sub>c</sub>" es tal que C está en alguno de los bulbos del conjunto). En esta situación, perteneciendo C a una región de convergencia de período N, podemos decir que a partir de cierta iteración j-ésima tal que la secuencia ya haya convergido a la órbita periódica, las  $Z_i$  se repetirán cada N iteraciones. Puesto que n se extiende hasta infinito, y al ser  $\lambda$  una especie de "media geométrica", podemos asegurar que el valor del límite no se ve afectado por los primeros j valores de la secuencia, que visto así, no son sino un régimen transitorio hasta el estado estable. De este modo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 2 \cdot \sqrt[n]{\left( \prod_{i=1}^N |Z_i| \right)^{n/N}} \right)$$

donde ahora los " $Z_i$ " son los N puntos de la órbita, que llamaremos, como en la primera demostración del teorema de los bulbos, " $Z_{pi}$ ".

Desarrollando tenemos que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 2 \cdot \left( \prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \right)^{1/N} \right)$$

$$\lambda = \ln \left( 2 \cdot \left( \prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \right)^{1/N} \right)$$

que, por definición de  $\lambda$ , y según la suposición hecha, ha de ser  $\leq 0$ . De aquí,

$$2 \cdot \left( \prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \right)^{1/N} \leq 1$$

$$\left( \prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \right)^{1/N} \leq \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \leq \frac{1}{2^N}}$$



Este teorema nos dice que, para las  $C$  tales que " $f_c$ " haga converger  $Z_i$  a una órbita periódica, los puntos  $Z_{pi}$  de la misma deberán cumplir la desigualdad. Las  $C$  que estén en los límites de las regiones de convergencia, al igual que antes, cumplirán la igualdad.

Observamos que el resultado no es exactamente igual al obtenido en la primera demostración del teorema. Sin embargo, ambos resultados son coherentes entre sí, puesto que es inmediato comprobar que

$$|Z_a \cdot Z_b| = |Z_a| \cdot |Z_b|$$

Para las aplicaciones en las que se utilice este teorema, como las que en sucesivos puntos se verán, se utilizará la versión del teorema que más convenga.

## 4.5. Aplicación del teorema

El teorema antes demostrado nos da información de lo que ocurre en las zonas del plano  $C$  en las que la iteración no diverge, es decir, en el interior del conjunto de Mandelbrot. En este apartado utilizaremos esta información para intentar deducir dónde se encuentran dichas zonas dentro del plano  $C$ , para los casos  $N=1, 2$  y  $3$ .

### 4.5.1. Caso $N=1$

Por aplicación inmediata del teorema, sabemos que

$$|Z| \leq \frac{1}{2}$$

que nos indica que el punto de convergencia de todas las secuencias generadas por las  $C$  contenidas en el bulbo  $N=1$  tiene un módulo menor o igual que  $\frac{1}{2}$ .

Tenemos ahora que hallar la relación entre  $C$  y  $Z$  para llevar la información que nos proporciona el teorema de los bulbos "desde  $Z$  hasta  $C$ ". Podemos hallar dicha relación de manera sencilla puesto que sabemos que  $Z_{n+1}$  ha de ser igual a  $Z_n$ :

$$Z_{n+1} = Z_n \Rightarrow Z_n = Z_n^2 + C$$

Podemos olvidarnos del número de iteración a partir de la cual la secuencia es constante, generalizando a:

$$Z = Z^2 + C$$

Despejando  $C$  tenemos que

$$C = Z - Z^2$$

El límite de la región de convergencia vendrá dado para la igualdad del teorema, es decir, cuando  $Z$  tenga módulo  $\frac{1}{2}$ :

$$Z = \frac{1}{2} e^{j\phi}$$

De donde

$$C_{11} = \frac{1}{2} e^{j\Phi} - \frac{1}{4} e^{j2\Phi}$$

Obtenemos así una curva paramétrica función de  $\phi$ . Por tratarse de una función exponencial compleja sabemos que dicha curva será periódica con período  $2\pi$ . Podemos sin más asumir que

$$\Phi \in [0, 2\pi)$$

Podemos dibujar esta curva delimitante del bulbo  $N=1$  dando valores a  $\phi$  en el rango indicado. El resultado es el dibujo superior izquierdo de la figura 4.4.

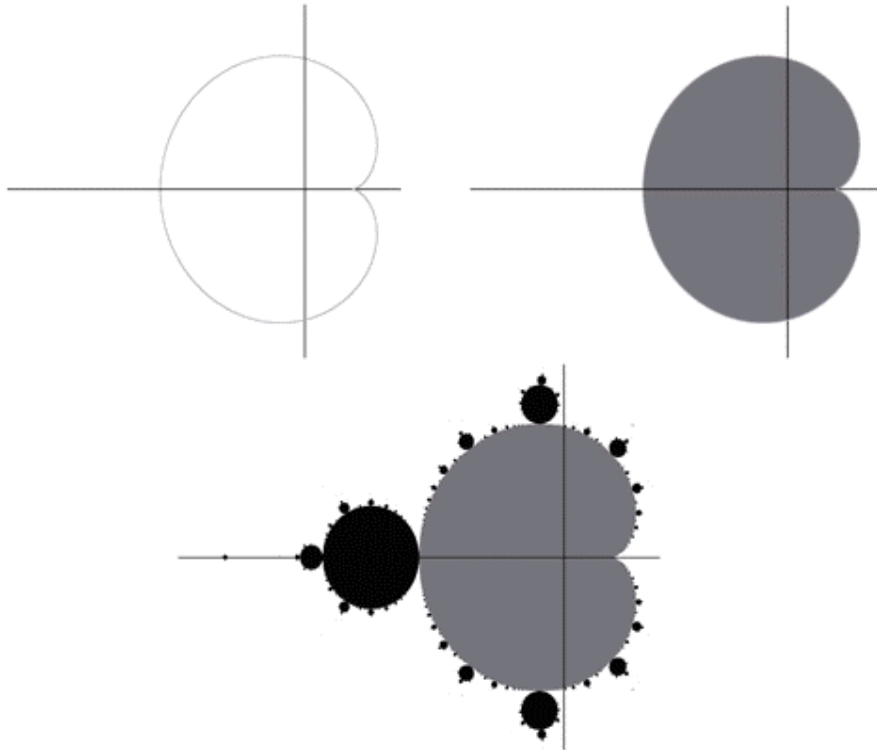


Figura 4.4

La figura superior derecha corresponde al interior de la región delimitada, es decir, aquellos valores de  $C$  que cumplen la desigualdad del teorema demostrado. Superponiendo esta región (bulbo de período  $N=1$ ) con el resto del conjunto de Mandelbrot calculado de forma iterativa (en color negro) comprobamos que el resultado es correcto. Demostramos así, además, que el resto de bulbos han de ser de períodos mayores que 1.

La obtención de la región interior al bulbo se logra a partir de una función  $f(x,y)$  que toma el valor 0 en el límite de la región y valores negativos en el interior. Se ha usado dicha función para dibujar la región indicada en la esquina superior derecha de la figura 4.4. Dicha función se ha obtenido a partir del propio teorema demostrado:

$$Z = Z^2 + C \Rightarrow Z^2 - Z + C = 0 \Rightarrow$$

$$Z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4C}}{2}$$

Descomponiendo  $C$  en sus partes real e imaginaria  $(x,y)$ , y haciendo

$$|Z| \leq \frac{1}{2}$$

en la expresión anteriormente mencionada, se obtiene una inecuación de la forma

$$f(x, y) \leq 0$$

siendo

$$f(x, y) = 256(x^2 + y^2)^2 - 96(x^2 + y^2) + 32x - 3$$

De modo que

$$f(x, y) < 0 \Rightarrow \text{interior del bulbo } N=1$$

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \text{límite del bulbo } N=1$$

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow \text{exterior del bulbo } N=1$$

La demostración es la siguiente:

$$|Z|^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\left| \frac{1 \pm \sqrt{1-4C}}{2} \right| \leq 1$$

Si

$$C = x + jy$$

y hacemos

$$\sqrt{1-4C} = a + jb$$

siendo

$$a^2 = \frac{1-4x \pm \sqrt{1-8x+16(x^2+y^2)}}{2}$$

$$b^2 = a^2 - 1 + 4x$$

resulta que

$$(1 \pm a)^2 + b^2 \leq 1$$

$$\pm \sqrt{1-8x+16(x^2+y^2)} \leq \mp 2a$$

$$-1 + 16(x^2 + y^2) \leq \pm 2\sqrt{1-8x+16(x^2+y^2)}$$

$$1 - 32(x^2 + y^2) + 256x^4 + 256y^4 + 512x^2y \leq 4 + 64(x^2 + y^2) - 32x$$

de donde ya se obtiene

$$256(x^2 + y^2)^2 - 96(x^2 + y^2) + 32x - 3 \leq 0$$

#### 4.5.2. Caso N=2

Los puntos C que pertenezcan al bulbo N=2 sabemos que provocarán una secuencia convergente a una órbita que oscilará entre dos valores,  $Z_{p1}$  y  $Z_{p2}$ . Por el teorema demostrado sabemos que:

$$|Z_{p1} \cdot Z_{p2}| = |Z_{p1}| \cdot |Z_{p2}| \leq \frac{1}{4}$$

Podemos hallar  $Z_{p1}$  y  $Z_{p2}$  resolviendo la ecuación

$$Z_{n+2} = Z_n \Rightarrow Z = f_c(f_c(Z))$$

que resulta en el siguiente polinomio de segundo grado en C:

$$\begin{aligned} Z &= Z^4 + 2C \cdot Z^2 + C^2 + C \\ C^2 + C \cdot (1 + 2Z^2) + (Z^4 - Z) &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} C_{11} &= Z - Z^2 \\ C_{12} &= -1 - Z - Z^2 \end{aligned}$$

siendo Z cualquiera de las dos posibles valores  $Z_{p1}$  o  $Z_{p2}$ .

Vemos que la primera de las soluciones corresponde al resultado que ya obtuvimos para N=1. Este hecho resulta lógico, puesto que toda órbita de período 1 es, de alguna manera, periódica también con período 2, 3, 4 y cualquier otro número entero positivo. Podemos por tanto desechar esta solución que describe el ya conocido bulbo N=1 y centrarnos en la segunda solución.

Podemos ahora despejar Z de esta solución e intentar introducirlo en la desigualdad dada por el teorema de los bulbos. Así, despejando tenemos que

$$Z^2 + Z + (C + 1) = 0 \Rightarrow Z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4C}}{2}$$

Las dos soluciones corresponden con los dos posibles valores de Z ( $Z_{p1}$  o  $Z_{p2}$ ), de modo que ya podemos introducir éstos en la desigualdad del teorema:

$$\left| \frac{-1 + \sqrt{-3 - 4C}}{2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3 - 4C}}{2} \right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} & \left| (-1 + \sqrt{-3-4C}) \cdot (-1 - \sqrt{-3-4C}) \right| \leq 1 \\ & \left| 1 + \sqrt{-3-4C} - \sqrt{-3-4C} + 3 + 4C \right| \leq 1 \\ & |4 + 4C| \leq 1 \\ & 4 \cdot |1 + C| \leq 1 \\ & |1 + C| \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$f(x, y) = (x+1)^2 + y^2 - \frac{1}{16}$$

Vemos que la región N=2 se trata del interior de una circunferencia de radio  $\frac{1}{4}$  centrado en  $C=-1$ . El límite de la región será, por tanto:

$$C_{l2} = -1 + \frac{1}{4} e^{j\Phi}$$

Al igual que antes, comprobamos gráficamente la situación de ésta:

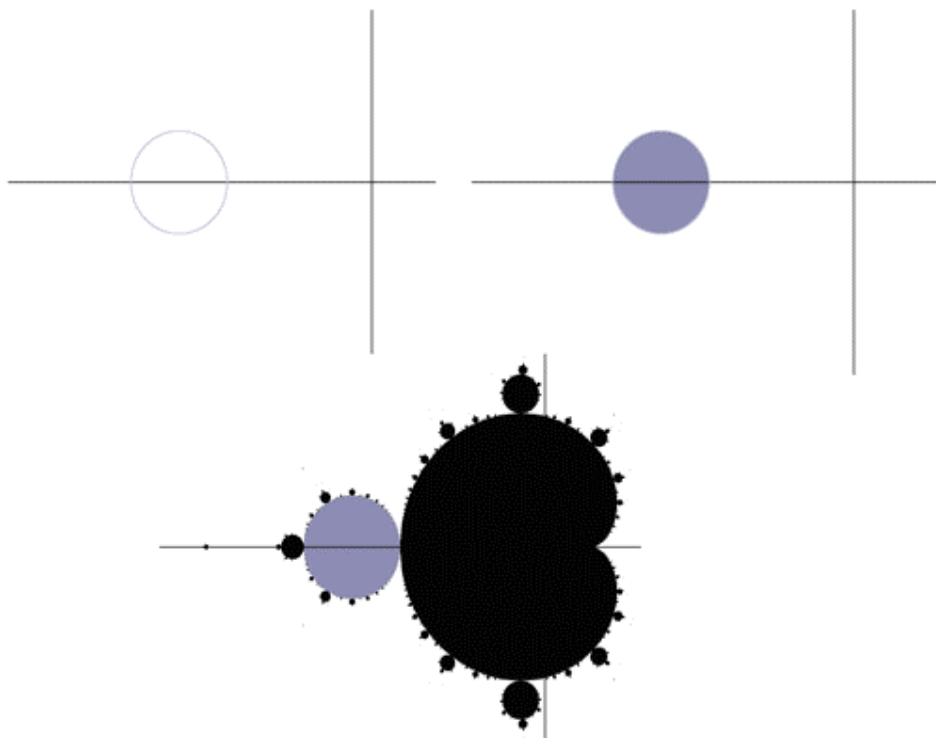


Figura 4.5

De nuevo, en la parte superior izquierda se ha dibujado el límite del bulbo N=2 mediante la curva paramétrica, mientras que el dibujo superior derecho se ha obtenido con la función  $f(x,y)$ . En la parte inferior, superponiendo la el dibujo superior derecho con el conjunto de Mandelbrot empírico, se nos confirma una vez más la validez del teorema de los bulbos.

Aparentemente, las regiones  $N=1$  y  $N=2$  tienen un punto en común. Podemos confirmar dicha suposición calculando la intersección entre ambas regiones y comprobando que el sistema resultante tiene una sola solución:

$$\begin{aligned}C_{11} &= Z - Z^2 \\C_{12} &= -1 - Z - Z^2\end{aligned}$$

De donde, igualando  $C_{11}$  y  $C_{12}$ :

$$Z - Z^2 = -1 - Z - Z^2 \Rightarrow Z = -\frac{1}{2}$$

que sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones resulta

$$C_{112} = -\frac{3}{4}$$

que es el punto de tangencia entre las regiones  $N=1$  y  $N=2$ , y que corresponde con  $C_{11}(\Phi)$  para  $\phi = \pm\pi$ .

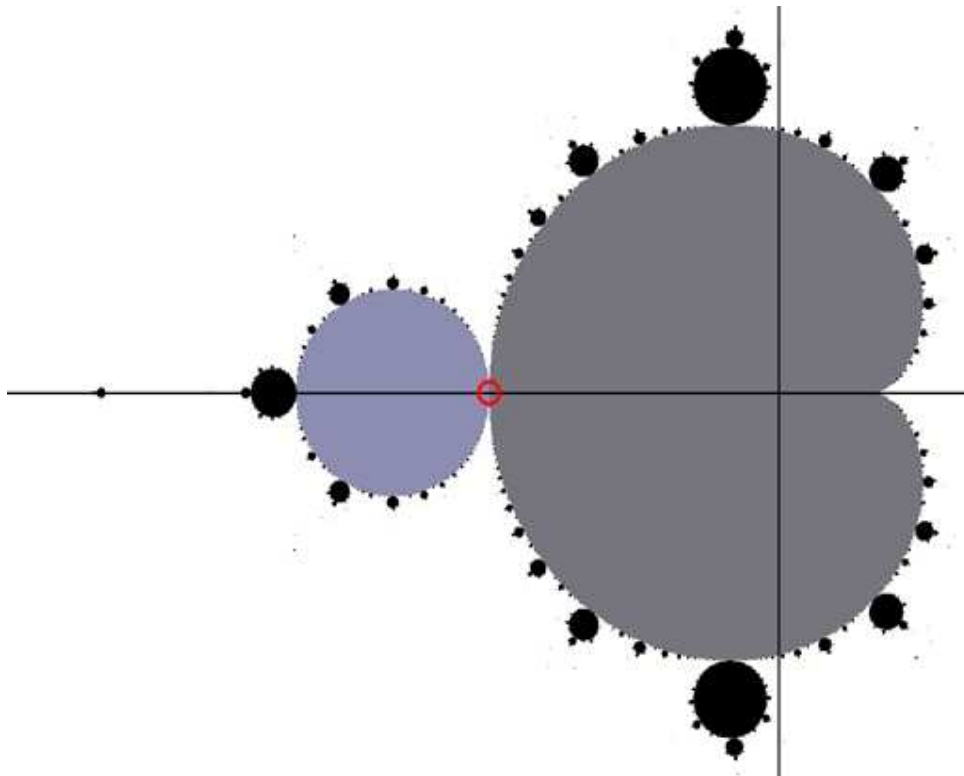


Figura 4.6

Como vemos, el valor al que converge la órbita de período  $N=1$  es  $-1/2$  (que coincide con lo que pronostica el teorema para  $N=1$ ), que a su vez es el valor al que converge la órbita de período 2, siendo los dos valores de oscilación "el mismo",  $Z = -1/2$ , con lo que el teorema también se cumple para  $N=2$ , como era de esperar.

### 4.5.3. Caso N=3

En este caso, y una vez más, por el teorema, sabemos que

$$|Z_{p1} \cdot Z_{p2} \cdot Z_{p3}| = |Z_{p1}| \cdot |Z_{p2}| \cdot |Z_{p3}| \leq \frac{1}{8}$$

Podemos hallar  $Z_{p1}, Z_{p2}$  y  $Z_{p3}$  resolviendo la ecuación

$$Z_{n+3} = Z_n \Rightarrow Z = f_c(f_c(f_c(Z)))$$

que resulta en el siguiente polinomio en C de grado cuatro:

$$Z = Z^8 + (4C)Z^6 + (6C^2 + 2C)Z^4 + (4C^3 + 4C^2)Z^2 + (C^4 + 2C^3 + C^2 + C)$$

$$C^4 + C^3(4Z^2 + 2) + C^2(6Z^4 + 4Z^2 + 1) + C(4Z^6 + 2Z^4 + 1) + (Z^8 - 1) = 0$$

siendo Z cualquiera de las tres  $Z_{p_i}$ , y que define cuatro regiones con convergencia a órbitas de período 3. Sin embargo, de antemano sabemos que una de ellas deberá ser el bulbo N=1, puesto que N=1 implica, como ya se dijo, N=3. De modo que este polinomio ha de ser divisible por el resultante de aquella región, que era

$$C = C_{11} = Z - Z^2$$

Efectivamente, comprobamos que el polinomio es divisible por éste, resultando:

$$\frac{C^4 + C^3(4Z^2 + 2) + C^2(6Z^4 + 4Z^2 + 1) + C(4Z^6 + 2Z^4 + 1) + (Z^8 - 1)}{C - (Z - Z^2)} =$$

$$= C^3 + C^2(3Z^2 + Z + 2) + C(3Z^4 + 2Z^3 + 3Z^2 + 2Z + 1) + (Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0$$

Al ser el polinomio de grado tres, o lo que es lo mismo, al haber eliminado ya una de las regiones, deducimos que existen 3 regiones de convergencia N=3. Puesto que sabemos, como demostramos, que el conjunto de Mandelbrot es simétrico respecto al eje de las abscisas, a la fuerza una de las regiones ha de estar centrada en el eje real y las otras dos han de estar fuera de él siendo simétricas entre sí respecto a aquél o ambas también en el eje real.

Podemos intentar calcular, al menos, si las regiones de N=3 intersecan a la de N=1. Está claro que es imposible que intersequen con el bulbo N=2, puesto que 2 no es divisor de 3. Para ello, sustituimos

$$C = Z - Z^2 \text{ (resultado para N=1)}$$

en

$$C^3 + C^2(3Z^2 + Z + 2) + C(3Z^4 + 2Z^3 + 3Z^2 + 2Z + 1) + (Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0$$

dando lugar a

$$4Z^2 + 2Z + 1 = 0$$

de donde

$$Z = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{4}$$

que se comprueba que, como era de esperar, tiene módulo igual a  $\frac{1}{2}$ .

Sustituyendo en  $C_{i1}$ , se obtiene

$$C_{i13} = \frac{-1 \pm j3\sqrt{3}}{8}$$

que se comprueba fácilmente que corresponde con  $C_{i1}(\Phi)$  para  $\phi = \pm 2\pi/3$ .

Puesto que hemos obtenido los dos puntos de tangencia simétricos respecto al eje real, estamos ya en disposición de afirmar que existen tres bulbos con  $N=3$ , dos "sobre" el bulbo  $N=1$  y otro en algún lugar del eje real.

En la figura 4.7 se representa el conjunto de Mandelbrot en el que se han coloreado los bulbos  $N=1$  y  $N=2$  y en el que se han marcado los puntos de tangencia ahora calculados. Sobre el eje real, el punto de tangencia  $C_{t12}$ . Un poco a la izquierda del eje imaginario, de manera simétrica respecto al real, los dos puntos de tangencia  $C_{t13}$ .

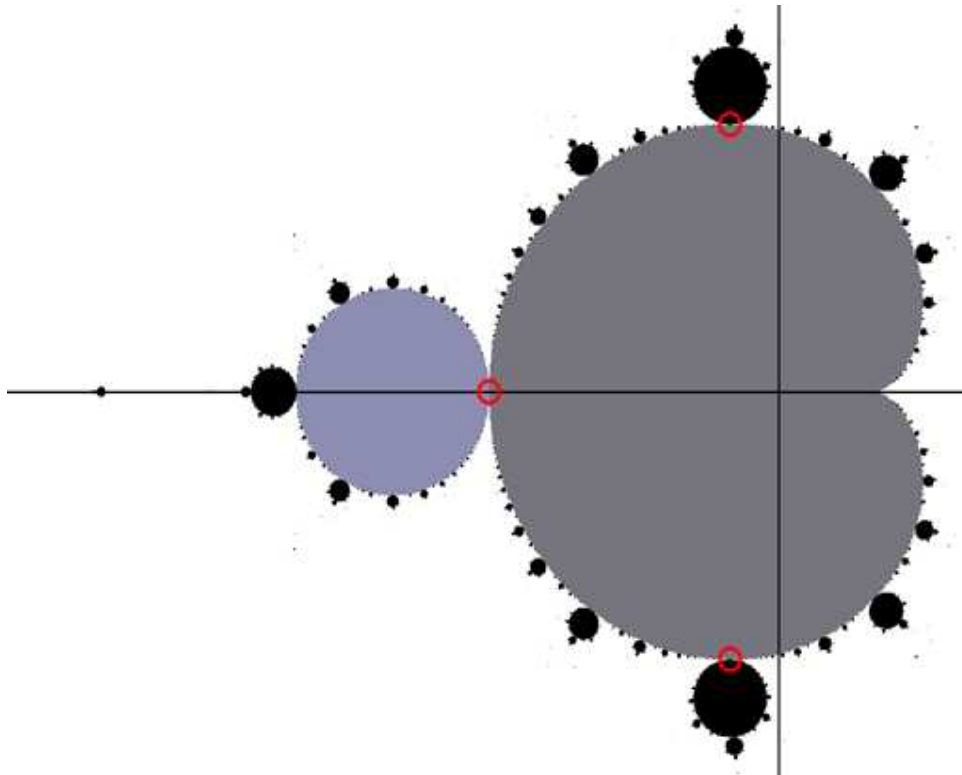


Figura 4.7

Evidentemente, gracias a los puntos de tangencia  $C_{t13}$  podemos afirmar que dos de los tres bulbos de período  $N=3$  son los dos aparentes discos que se apoyan en el bulbo  $N=1$ .



## 5. LOS POLINOMIOS $Q_N$

Como vimos en el capítulo anterior, la obtención de las zonas de convergencia se vuelve complicado para  $N$  mayores que 3. Se nos presenta pues la necesidad de poder conocer la situación de estas zonas dentro del plano  $C$  de una manera alternativa. Este nuevo método deberá ser más sencillo de utilizar, en el sentido de que deberá ofrecer relaciones que sean sencillas de resolver, aunque sea a costa de obtener menos información sobre los bulbos. Recordemos que con el teorema de los bulbos, después de todo, fuimos capaces de determinar con total precisión la forma y situación de los bulbos  $N=1$  y  $N=2$ , y que obtuvimos valiosa información sobre los bulbos  $N=3$ .

De toda la información que nos gustaría obtener sobre los bulbos, la más importante podría ser el número de bulbos existentes de un cierto período  $N$  y su situación en el plano  $C$ . Su situación la podríamos dar, determinando al menos un punto que pertenezca al bulbo y que represente su posición, su "centro". Definiremos ahora qué se entiende por "centro" de un bulbo, puesto que los bulbos son un conjunto compacto de puntos del plano.

### 5.1. Definición de "centro" de los bulbos

Necesitamos definir de alguna manera el "centro" de los bulbos. En principio, aunque pudiéramos asumir que los bulbos son "circunferencias" excepto para el caso  $N=1$  atendiendo a las gráficas empíricas del conjunto de Mandelbrot que se presentaron en la introducción y teniendo en cuenta que así se ha demostrado que es para  $N=2$ , no optaremos por hacer tal suposición. Queda por tanto desechada la opción de definir el "centro" de un bulbo como su centro geométrico o centro de masas (suponiendo masa constante en el bulbo), si bien pudiera ocurrir que el "centro de bulbo" que vallamos a definir coincida con aquél.

La definición del "centro" de un bulbo la buscamos atendiendo a la información de la que ya disponemos acerca de ellos. Evidentemente, nos fijamos en el teorema de los bulbos:

$$\prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \leq \frac{1}{2^N} \quad \text{o alternativamente} \quad \left| \prod_{i=1}^N Z_{pi} \right| \leq \frac{1}{2^N}$$

que reconvertimos en

$$2^N \cdot \prod_{i=1}^N |Z_{pi}| \leq 1 \quad \text{o alternativamente} \quad 2^N \cdot \left| \prod_{i=1}^N Z_{pi} \right| \leq 1$$

Sabemos que la igualdad se da en los límites de los bulbos, que son puntos "indiferentes" en cuanto a convergencia. Para los puntos interiores se da la desigualdad. Podemos interpretar el teorema como

$$g(C) \leq 1$$

siendo

$$g(C) = 2^N \cdot \left| \prod_{i=1}^N Z_{pi} \right| = 2^N \cdot \prod_{i=1}^N |Z_{pi}|$$

que se trata en una función de  $C$ , a pesar de que la expresión anterior lleve a confusión. Recordemos que la secuencia  $Z_i$ , y por tanto la órbita formada por los puntos  $Z_{pi}$ , es dependiente únicamente del valor de  $C$  escogido para la transformación  $f_C$ .

Por otra parte, sabemos que  $g(C)$  toma su valor máximo (e igual a uno) en los límites del bulbo correspondiente. En el interior del bulbo ocurre que  $g(C) < 1$ . Evidentemente, esta función  $g(C)$  está directamente relacionada con la  $f(x,y)$  que utilizamos en el capítulo anterior para colorear las zonas  $N=1$  y  $N=2$ . La relación es, claro está,

$$f(x, y) = g(C) - 1 = g(x, y) - 1$$

Dicha función  $g(C)=g(x,y)$  se comprueba que es continua, no constante y que tiene un solo mínimo. De este modo, la región de convergencia  $N$  sería una especie de "agujero" con un anillo de valor máximo e igual a uno en su periferia (límite del bulbo) y un punto con valor mínimo (fondo del agujero) en alguno de sus puntos interiores. Una masa colocada en cualquier punto del bulbo "caería" a dicho punto como una canica cae por una manta pinchada desde arriba por una vara. Esta especie de "centro de gravedad" parece un buen candidato para nuestro "centro del bulbo".

Matemáticamente, el mínimo de  $g(C)$  característico de ese punto podría ser nulo. Para que esto pudiera ser verdad, alguna de las  $Z_{pi}$  de la órbita debería pasar por el origen de coordenadas para así asegurar que el producto de  $g(C)$  fuera nulo. En tal situación, puesto que 0 sería una de los puntos de la órbita y puesto que  $Z_0$  (valor inicial de la iteración) también es 0, la secuencia  $Z_n$  desde su primera iteración formaría parte de la órbita.

Tomando dicho punto como "centro" de cada bulbo, se concluye que el "centro" es tal que la órbita generada para la  $C$  a la que representa comienza desde la primera iteración. O lo que es lo mismo, cualquiera de las  $N$  secuencias generadas a partir de  $f_c^N$  alcanzaría su punto fijo desde la primera iteración. Tal punto se denomina "superatractivo". En nuestro caso, el "centro" de cada bulbo resulta ser el punto "superatractivo" del bulbo, queriendo decir con esto que desde el principio la secuencia generada forma la órbita periódica, sin régimen transitorio inicial.

Quedaría por demostrar que tal punto existe dentro de cada bulbo o, en todo caso, que tal punto es único. En cualquier caso, recopilando todo lo anterior, la situación sería la siguiente:

$$\begin{aligned} g(C) > 1 &\Rightarrow \text{exterior del bulbo} \\ g(C) = 1 &\Rightarrow \text{borde del bulbo} \\ g(C) < 1 &\Rightarrow \text{interior del bulbo} \\ g(C) = 0 &\Rightarrow \text{centro del bulbo} \end{aligned}$$

que se representa también en la figura 5.1:

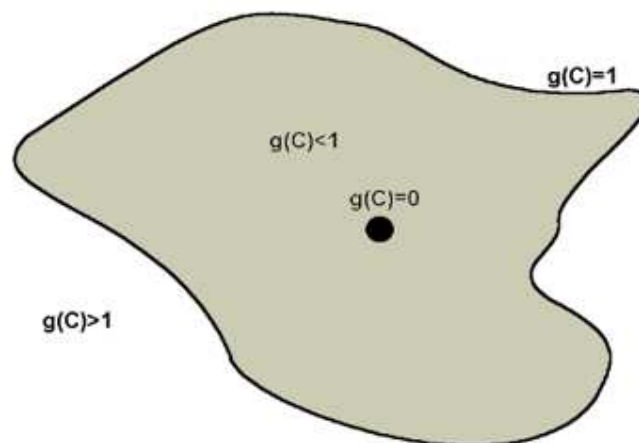


Figura 5.1

Se presenta a continuación un dibujo real del conjunto de Mandelbrot calculado con el fin de corroborar esta situación. Se ha representado el valor de  $g(C)$  para  $N=1$  (dibujo izquierdo) y  $N=3$  (dibujo derecho), si bien se encuentra una y otra vez esta situación cualquiera que sea el bulbo elegido de entre los infinitos existentes:

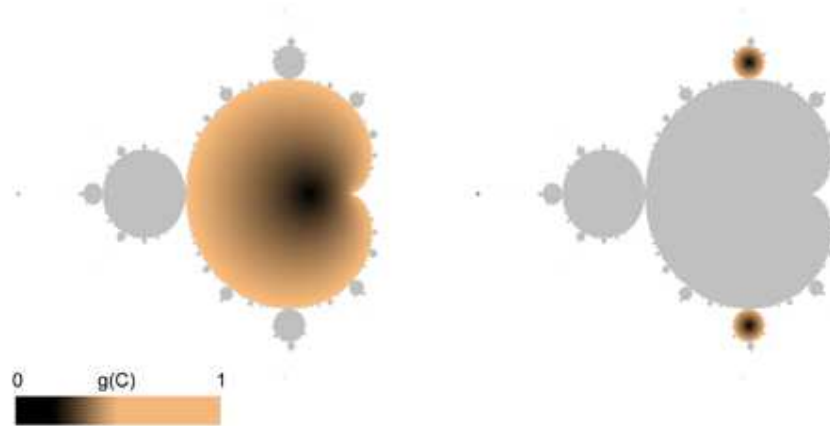


Figura 5.2

Atendiendo al gradiente de color indicado abajo a la izquierda de la figura, puede observarse como la situación predicha se cumple.

Con lo explicado, está claro que para hallar dichos centros no tenemos más que iterar  $N$  veces la aplicación  $f_c(Z)$  con  $Z_0=0$  y analizar para qué valores de  $C$  el punto  $Z_N$  vuelve a ser 0. Con esto estaríamos comprobando la existencia de una órbita de período  $N$  desde la primera iteración, que por tanto, correspondería con el centro del bulbo.

$$f_c^N(0) = 0 \Rightarrow \text{centro del bulbo}$$

Realizar este experimento proporciona un polinomio  $P_N$  en  $C$  cuyas raíces hay que encontrar:

$$P_N(C) = f_c^N(0) = 0$$

donde los polinomios  $P_N(C)$  para las primeras  $N$  son:

$$P_1(C) = C$$

$$P_2(C) = C^2 + C$$

$$P_3(C) = C^4 + 2C^3 + C^2 + C$$

$$P_4(C) = C^8 + 4C^7 + 6C^6 + 6C^5 + 4C^4 + 2C^3 + C^2 + C$$

...

obteniéndose un  $P_N$  mediante la ley de recurrencia:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{N+1}(C) = (P_N(C))^2 + C \\ P_1(C) = C \end{array}}$$

En este punto podemos comenzar a sacar conclusiones acerca de los bulbos y por tanto del propio conjunto de Mandelbrot.

Evidentemente, el grado del polinomio  $P_N(C)$  es  $2^{N-1}$ . Por tanto,  $P_N$  deberá tener exactamente  $2^{N-1}$  raíces, que representan los centros de los bulbos. Esto nos podría hacer pensar que en el conjunto de Mandelbrot deben existir  $2^{N-1}$  bulbos de período "N". Sin embargo, de los resultados del estudio sobre  $N=1, 2$  y  $3$  del teorema de los bulbos obtuvimos que existe 1 bulbo para  $N=1$ , 1 para  $N=2$  y 3 para  $N=3$ , que no coincide con el número de raíces  $2^0, 2^1$  y  $2^2$  respectivos. Esto se debe a que, como ya dijimos en el capítulo anterior, un bulbo de período  $N$  conlleva implícitamente el que también sea un bulbo de período  $2N, 3N, 4N, \dots, nN$ . Llamemos, pues, " $U_N$ " al número de bulbos "verdaderos" de período  $N$  que, evidentemente, será menor que  $2^{N-1}$ . De hecho,  $U_N$  es fácilmente computable. En principio basta con restar de  $2^{N-1}$  tantas unidades como divisores existan del entero  $N$ .

$$U_N = 2^{N-1} - \sum_{K|N} U_K$$

donde el símbolo " $K|N$ " significa " $K$  divide a  $N$ " o, lo que es lo mismo, " $K$  es divisor de  $N$ ".

Como ejemplo, para los primeros valores de  $U_N$  se obtiene:

$$\begin{aligned} U_1 &= 2^{1-1} = 1 \\ U_2 &= 2^{2-1} - U_1 = 2 - 1 = 1 \\ U_3 &= 2^{3-1} - U_1 = 4 - 1 = 3 \\ U_4 &= 2^{4-1} - U_2 - U_1 = 8 - 1 - 1 = 6 \\ &\dots \end{aligned}$$

Vemos que los valores para  $N=1, 2$  y  $3$  ahora sí concuerdan con los resultados que obtuvimos mediante el teorema de los bulbos. Los primeros valores de  $U_N$  resultan ser:

$$U_N = \{1, 1, 3, 6, 15, 27, 63, 120, 252, 495, \dots\}$$

Cabría decir que cuando  $N$  es un número primo,  $U_N = 2^{N-1} - 1$ , y que salvo para estos números,  $U_N$  será inferior a  $2^{N-1} - 1$ . Podemos resumirlo como

$$\begin{aligned} N \text{ es primo} &\Rightarrow U_N = 2^{N-1} - 1 \\ N \text{ no es primo} &\Rightarrow U_N < 2^{N-1} - 1 \end{aligned}$$

En general, puede esperarse que cuando  $N$  tienda a infinito  $U_N$  también lo haga. Esto querría decir que en el conjunto de Mandelbrot está formado por infinitos bulbos, que van multiplicándose en su carrera hacia el caos.

En este punto podemos volver a los polinomios  $P_N(C)$ . La implicación de que un bulbo de período  $N$  implica periodicidad también de la forma  $nN$  influye directamente en los polinomios  $P_N(C)$ . Puesto que tan sólo  $U_N$  de las  $2^{N-1}$  raíces nos interesan (aquellas que representan a centros de bulbos de "verdadero" período igual a  $N$ ), el polinomio  $P_N(C)$  deberá ser divisible por todos los  $P_K(C)$  tal que " $K$  divida a  $N$ ". Es decir, que de la  $2^{N-1}$  raíces de  $P_N(C)$ , tan sólo  $U_N$  son raíces indicadoras de bulbos de período  $N$ .

Llamemos  $Q_N(C)$  o polinomio reducido a aquél resultante de dividir  $P_N(C)$  por todos sus polinomios divisores, y que por tanto tan sólo contiene raíces correspondientes a centros de bulbos de período  $N$  "verdadero":

$$Q_N(C) = \frac{P_N(C)}{\prod_{K|N} Q_K(C)}$$

Estos polinomios resultan ser:

$$Q_1(C) = C$$

$$Q_2(C) = C + 1$$

$$Q_3(C) = C^3 + 2C^2 + C + 1$$

$$Q_4(C) = C^6 + 3C^5 + 3C^4 + 3C^3 + 2C^2 + 1$$

...

De la forma de estos polinomios (así como de los  $P_N(C)$ ) obtenemos una conclusión:

Puesto que  $Q_N(C)$  se trata de un polinomio complejo de coeficientes reales que debe ser igual a 0 para los centros de los bulbos, las raíces del polinomio (los centros de los bulbos) han de ser reales o complejos conjugados dos a dos. Eso concuerda, una vez más, con el hecho de que el conjunto de Mandelbrot es simétrico respecto al eje real.

## 5.2. Aplicación de los polinomios $Q$ , para una $N$ dada

Busquemos los centros de un bulbo una vez fijada  $N$  mediante el método de los polinomios  $Q$ .

Para  $N=1$ , haciendo  $Q_1(C) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} Q_1(C) &= 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

que nos indica directamente que el "centro" de potencial del bulbo  $N=1$  es el origen del plano complejo  $C$ .

Para  $N=2$ , haciendo  $Q_2(C) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} Q_2(C) &= 0 \\ C + 1 &= 0 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

lo que significa que el bulbo  $N=2$  está centrado en  $C=-1$ , algo que ya se demostró en el capítulo anterior.

Para  $N=3$ ,  $Q_3(C)=0$  resulta en

$$\begin{aligned} Q_3 &= 0 \\ C^3 + 2C^2 + C + 1 &= 0 \end{aligned}$$

que en este caso deberemos resolver por iteraciones. Por ejemplo, iterando

$$C = -\sqrt[3]{1 + C + C^2}$$

se obtiene

$$C = -1.7548775$$

que indica que debe existir, como ya dedujimos, un bulbo de  $N=3$  centrado en el eje real. Extrayendo ahora  $(C+1.7548775)$  del polinomio, obtenemos

$$\frac{C^3 + 2C^2 + C + 1}{C + 1.7548775} = C^2 + 0.2451224C + 0.5698401$$

de donde

$$C = -0.1225612 \pm j0.7448616$$

que representan dos bulbos simétricos respecto al eje real. Corremos a comprobar, sobre un dibujo del conjunto de Mandelbrot, de qué tres bulbos estamos hablando:

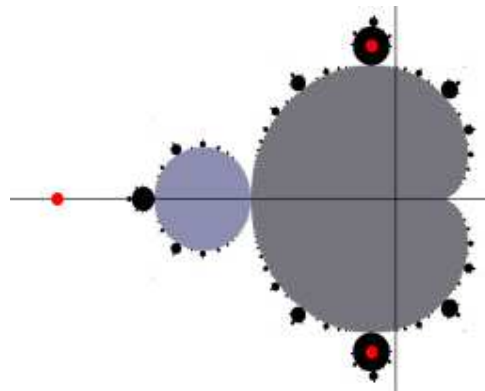


Figura 5.3

Comprobamos que en el caso de los bulbos conjugados se trata de los que ya teníamos "marcados" mediante el cálculo de los puntos de tangencia  $C_{13}$ . Como novedad, vemos dónde se sitúa el tercer bulbo  $N=3$ , que aunque en la imagen queda tapado por el propio punto rojo utilizado para marcar la posición, en cualquier otro dibujo del conjunto de Mandelbrot podemos apreciar.

Para  $N=4$ ,  $Q_4(C)=0$  lleva a

$$C^6 + 3C^5 + 3C^4 + 3C^3 + 2C^2 + 1 = 0$$

que mediante cálculos iterativos resulta que tiene las siguientes dos raíces reales:

$$C = -1.940799$$

$$C = -1.310702$$

Dividiendo el polinomio entre  $(C+1.940799)(C+1.310702)$ , tenemos que

$$C^4 - 0.251501C^3 + 1.27394662C^2 - 0.5024681C + 0.393097 = 0$$

que al tratarse de cuatro raíces complejas sabemos que deben ser pares de raíces conjugadas. Así, desarrollando

$$(C - Z_a)(C - Z_a^*)(C - Z_b)(C - Z_b^*) = 0$$

e identificando coeficientes, o siguiendo con métodos numéricos, se obtiene que

$$C = 0.28226546 \pm j0.5300536$$

$$C = -0.15651495 \pm j1.0787357$$

Como se ve, el cálculo de la posición de los bulbos (de sus centros) es relativamente sencilla. Basta construir el polinomio  $Q_N(C)$ , igualarlo a 0 y calcular, de forma iterativa o mediante cualquier otro método numérico, sus raíces. La figura 5.4 muestra los resultados obtenidos para los casos  $N=1,2,3$  y 4:

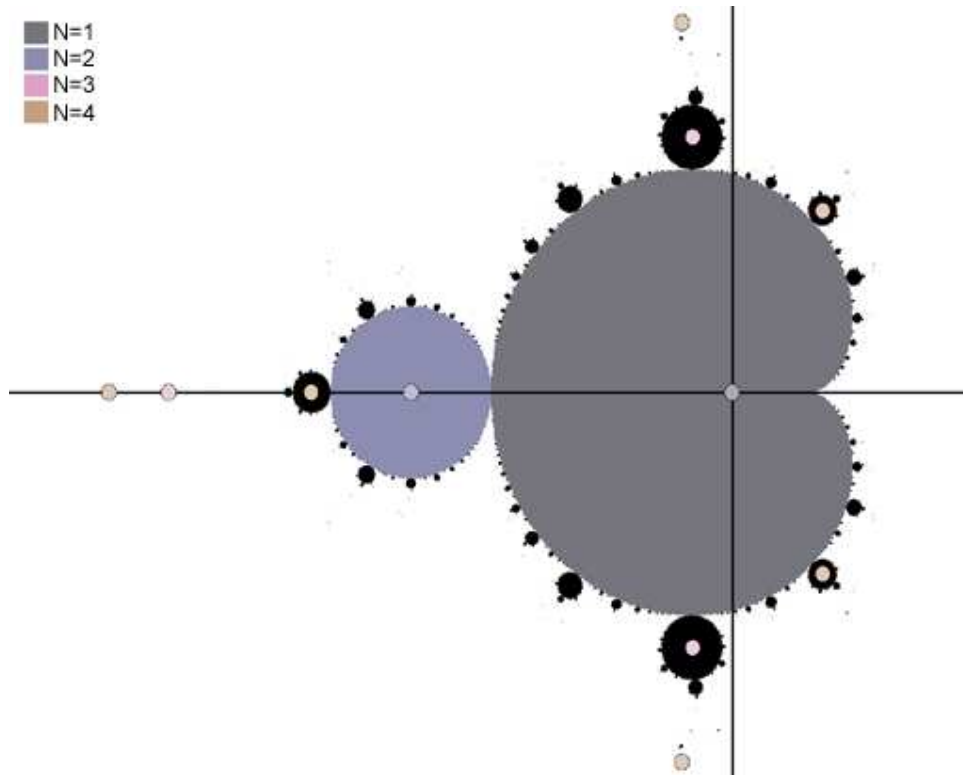


Figura 5.4

Nos surge la tentación de sugerir que el centro de los bulbos tal y como los hemos definido son también los centros geométricos de los bulbos que además, excepto para  $N=1$ , parecen ser discos. No estamos en posición de asegurarlo ni de demostrarlo, de modo que la cuestión habrá que investigarla en el futuro.

### 5.3. Aplicación de los polinomios $Q_N$ para cualquier $N$

Si bien el método aquí expuesto para el cálculo de las posiciones de los centros de los bulbos mediante los polinomios  $Q_N$  es sencillo y fácilmente automatizable, existe la posibilidad de tener un boceto rápido de la posición de los bulbos para una determinada  $N$  sin más que recorrer el plano complejo  $C$  y evaluar en cada punto (muestreando  $C$ ) el módulo de la función  $Q_N(C)$ . La gráfica resultante tendrá unas cuencas en las proximidades de los centros de los bulbos, tomando un valor mínimo e igual a cero (como se demostró) en el centro de cada uno. El número de mínimos (ceros) será igual a  $U_N$ .

La figura 5.5 muestra el resultado de este método para los casos  $N=4$  y  $N=6$ :

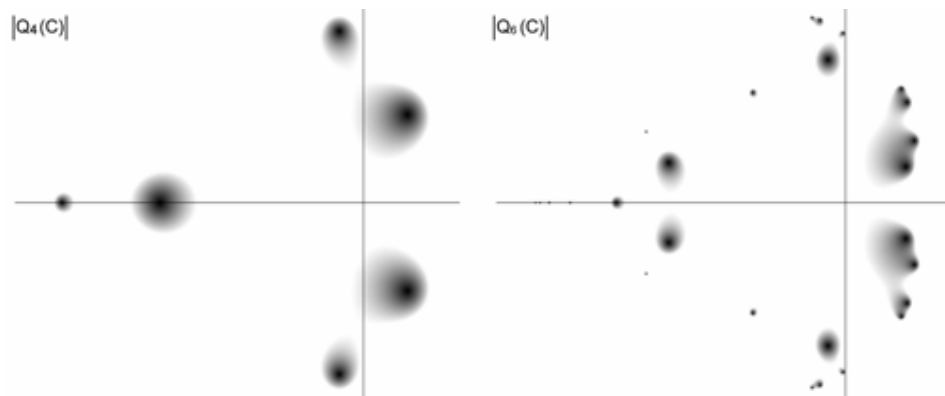


Figura 5.5

Se ha representado el módulo de  $Q_N(C)$  mediante tonalidades de grises. Las zonas oscuras son los valles de la función, siendo sus centros negros la posición de los ceros, y por tanto, de los centros de los bulbos. Puede observarse fácilmente en las dos gráficas como el número de bulbos coincide con los valores predichos  $U_4=6$  y  $U_6=27$ .



## 6. LOS POLINOMIOS P Y LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

En el capítulo anterior, estudiando los puntos periódicos de  $M$ , nos encontramos con los polinomios  $P$  y  $Q$ . Además, utilizamos estos últimos para hallar los centros de los bulbos de un determinado período. Los polinomios  $P$  quedaron relegados a ser un mero paso en la obtención del correspondiente polinomio  $Q$ , que eran los que realmente nos aportaba la información útil. Sin embargo, como se expondrá en este capítulo, los polinomios  $P$  parecen tener mayor trascendencia de la que se esperaba.

El resultado que se va a exponer en este capítulo, al igual que en el primero, es fruto de la matemática experimental, y nos va a llevar a encontrar un fenómeno peculiar de estos polinomios.

Como se ha visto, la manera más sencilla de hallar los centros de los bulbos es comenzar por encontrar las raíces reales de los polinomios  $P$  o  $Q$ . Las propiedades que se van a describir se obtuvieron a través del estudio de dichas raíces reales. Así, este capítulo está completamente enmarcado en el estudio del conjunto de Mandelbrot para el caso de  $Z$  real. Es por ello que se hará primero una breve descripción de lo que se conoce acerca de  $M$  en el eje real.

### 6.1. El eje real del conjunto de Mandelbrot

Si nos fijamos en el caso particular de  $C$  real, el sistema dinámico descrito para  $M$  se convierte en

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 + a \\x_0 &= 0\end{aligned}$$

siendo, como siempre,

$$\begin{aligned}Z_n &= x_n + jy_n \\C &= a + jb\end{aligned}$$

La definición de  $M$  se mantiene inalterable, por lo cual se define que forman parte del conjunto (segmento en este caso, por estar apoyado en el eje real) todos aquellos valores de "a" que derivan en secuencias que no escapan al infinito (cuyo valor absoluto no tiende a infinito). Así, el conjunto se convierte en el segmento de recta  $[-2, \frac{1}{4}]$ , que es la intersección de la recta real "b=0" con  $M(C)$ . Algunos de los puntos del segmento pertenecerán a los bulbos periódicos centrados en el eje real, de modo que en el segmento habrá puntos periódicos correspondientes a esos bulbos.

Es bien conocido que la distribución de dichos puntos periódicos es homóloga a la que ocurre en la ecuación logística estudiada por Mitchell Feigenbaum [8][9] en la década de los 70. La duplicidad de período (de los bulbos en el caso de  $M$ ), y la transición al caos ocurren de la misma manera que en la ecuación logística. El ratio 4.669 aparece también en la escala relativa de los sucesivos bulbos que nacen a partir del bulbo  $N=1$ , y la ventana de período 3, indicador del caos según el teorema de Sarkovskii [10], aparece en  $M$  personificado en el bulbo de  $N=3$  centrado sobre el eje real que descubrimos en el anterior capítulo. La característica fractal de la ecuación logística se traslada inalterable a  $M$  como no podía ser de otro modo. Pero vayamos por partes.

Por lo que dedujimos del teorema de los bulbos, sabemos que el conjunto de Mandelbrot para el caso  $C$  real debe ser como sigue en la figura 6.1:



Figura 6.1

Se ha marcado el segmento real con algo de espesor para poder ser mejor representado. La zona gris es la intersección del bulbo  $N=1$  con el eje real, luego contiene a todos los puntos del segmento cuyas órbitas convergen a un valor. La región azulada corresponde con los puntos periódicos  $N=2$ . La zona negra corresponde a regiones de otros períodos que no hemos sido aún capaces de determinar, si bien podemos calcular sus centros fácilmente mediante los polinomios  $Q$ .

Puesto que la secuencia  $x_n$  es real, se puede hacer un gráfica que presente cómodamente los valores la órbita " $x_{p_i}$ " en función de " $a$ " tal y como se hace en la figura 6.2:

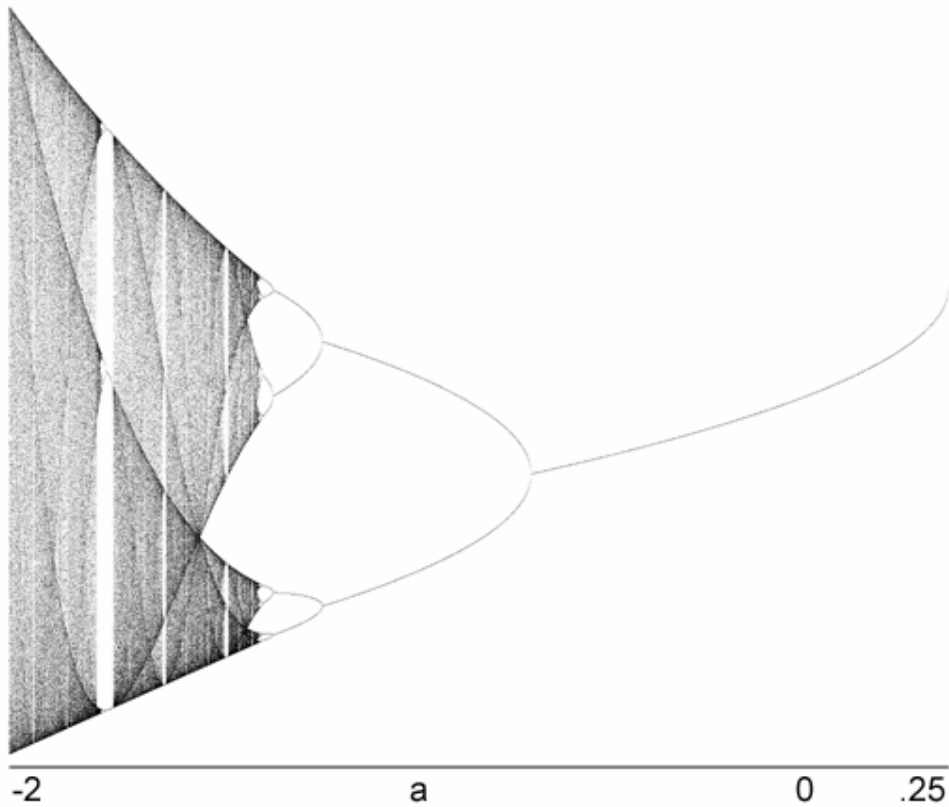
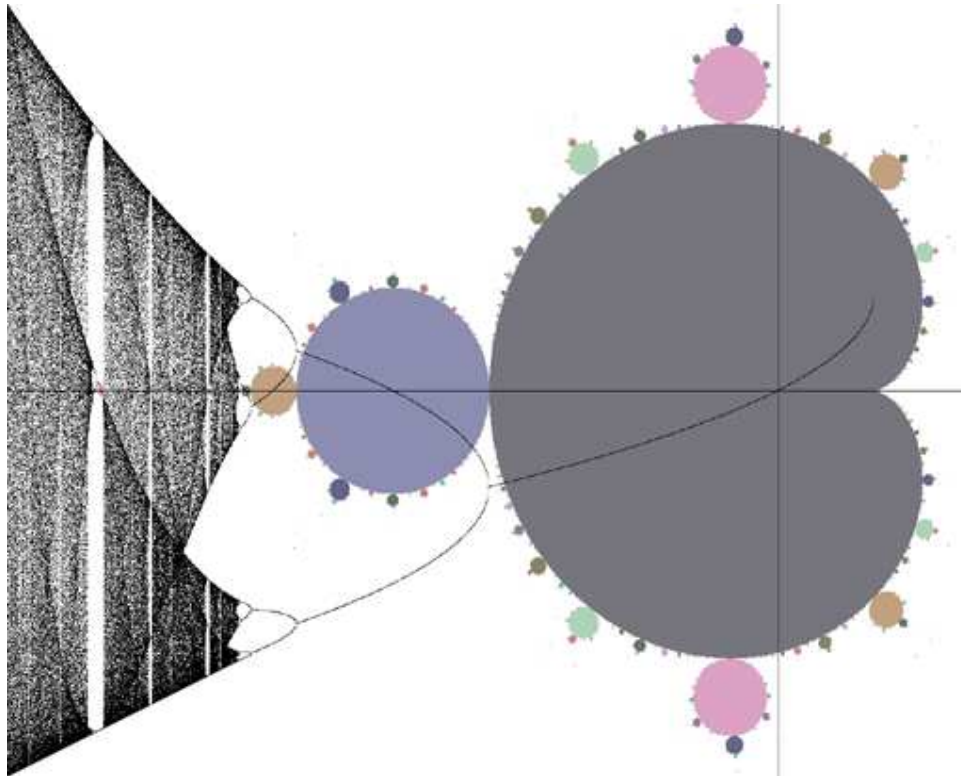


Figura 6.2

Para realizar la gráfica basta con calcular la órbita para cada "a" del eje horizontal y dibujar los puntos de la órbita asociada. El resultado, como se ve, es un diagrama como el de la ecuación logística de Feigenbaum.

En la figura 6.3 se ha superpuesto el conjunto de Mandelbrot con el resultado de la figura 6.2 para así poder observar la correspondencia entre la aplicación logística y el conjunto de Mandelbrot para el eje real. Efectivamente, apreciamos como la zona de atractor único del árbol de Feigenbaum corresponde al bulbo  $N=1$ , la zona de oscilación doble coincide a su vez con el bulbo de  $N=2$ . Para el resto de las  $N$  ambas gráficas coinciden también.



*Figura 6.3*

Del hecho de que  $M$  se comporte como la ecuación de Feigenbaum nos permite exportar de ésta muchas de propiedades útiles a aquella. Sin embargo nosotros no nos vamos a fijar demasiado en ellas.

## 6.2. Polinomios $P$

Una vez presentada la relación de la ecuación logística con el conjunto  $M$ , y asumiendo que se conoce su naturaleza tal y como se describe en la bibliografía, pasamos a estudiar la relación de los polinomios  $P$  con ella. Los pasos que se seguirán para mostrar tal relación serán los mismos que se siguieron cuando el autor de este ensayo la encontró repentinamente.

Como vimos, en el intento de encontrar los centros de los bulbos se definieron los polinomios  $P$  cuyas raíces, dada una  $N$ , determinan los centros de los bulbos de período  $N$  y de todos los bulbos con período  $K$  divisor de  $N$ . Para hallar dichas raíces habrá que echar mano de métodos numéricos, los cuales requieren, en general, un valor aproximado de la raíz a buscar. Con tal fin, se pueden representar los polinomios en una gráfica en la que se vean los cortes con el eje  $P_N(C)=0$ .

He aquí una gráfica de tales polinomios para los primeros tres valores de  $N$ :

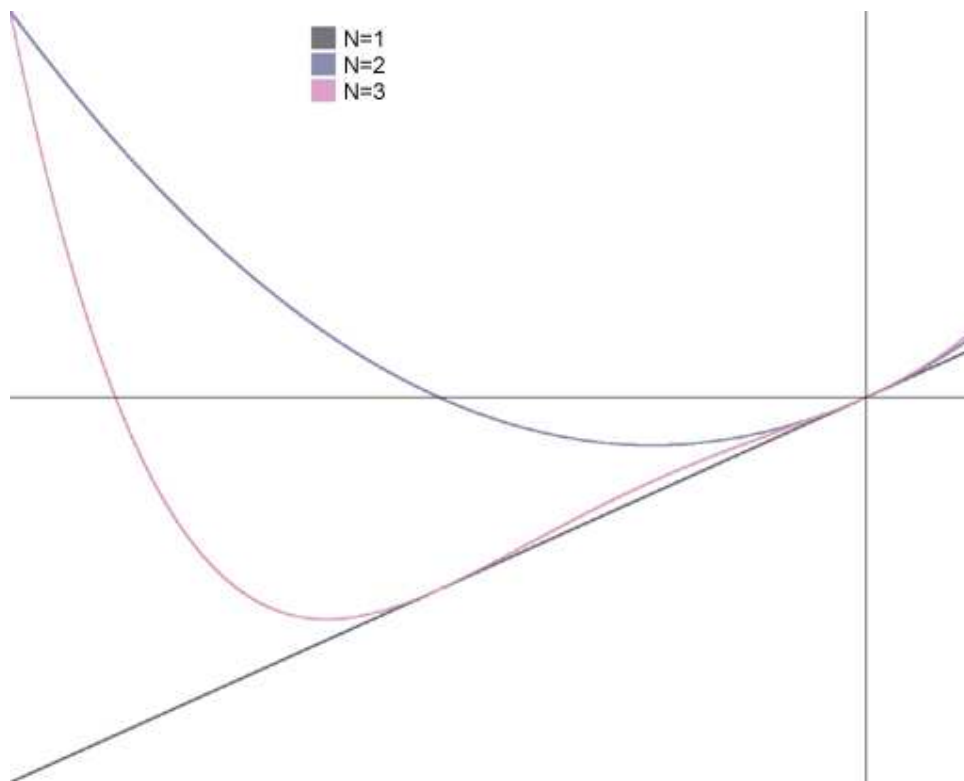


Figura 6.4

siendo, como se vio en el capítulo anterior,

$$P_1(C) = C$$

$$P_2(C) = C^2 + C$$

$$P_3(C) = C^4 + 2C^3 + C^2 + C$$

...

Podemos comprobar visualmente que las raíces reales de los polinomios cumplen lo que ya dijimos para los polinomios  $P_N$ . Efectivamente, comprobamos como, tanto los polinomios  $P_2$  como  $P_3$  pasan por el origen de coordenadas (cortan a  $P_N=0$  en  $a=0$ ) a pesar de que no existe realmente ningún bulbo de período 2 ni 3 cuyo centro esté en tal posición, si no contamos,

evidentemente, el de período 1, que por supuesto es periódico con cualquier valor de  $N$ . Es por ello precisamente que ambos pasan por dicho punto. Puede observarse esta misma situación en la figura 6.5, en la cual se ha dibujado además el polinomio  $P_6$  y que nos permite corroborar el efecto del que hablamos.  $P_6$  pasa por cero en los puntos en los que  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  también lo hacen, aportando realmente tan sólo cuatro raíces reales nuevas de verdadero período 6.

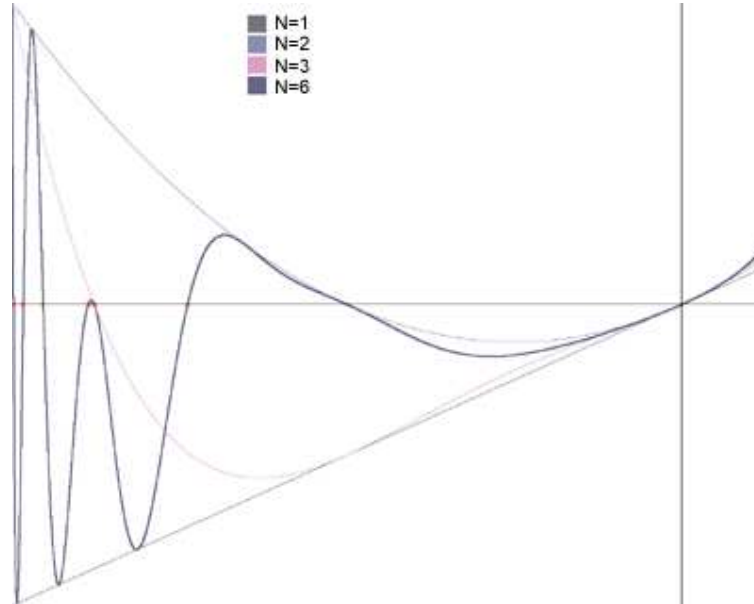


Figura 6.5

### 6.3. Polinomios $P$ y la ecuación logística

Antes de percatarse de la existencia de los polinomios  $Q$  y comenzar su estudio, tal y como hicimos en el capítulo anterior, aún quedaba por jugar un poco más con los polinomios  $P$ . Así, con el fin de tener una idea del comportamiento general de los polinomios se podía pensar en calcular un dibujo con la superposición de muchos polinomios  $P_N$  consecutivos. Esto permitiría dar una visión global de dichos polinomios, permitiendo ver la forma "general" de uno de estos polinomios  $P$ . El resultado, para tan sólo los primeros diez polinomios es el mostrado en la figura 6.6. Su silueta nos trae al recuerdo alguna imagen ya vista anteriormente. De hecho, se nos antoja bastante familiar. Inmediatamente repetimos el experimento con el primer centenar de polinomios, coloreados esta vez con un solo color, y que podemos apreciar en la figura 6.7. Esta vez la sensación de parecido es más que razonable:

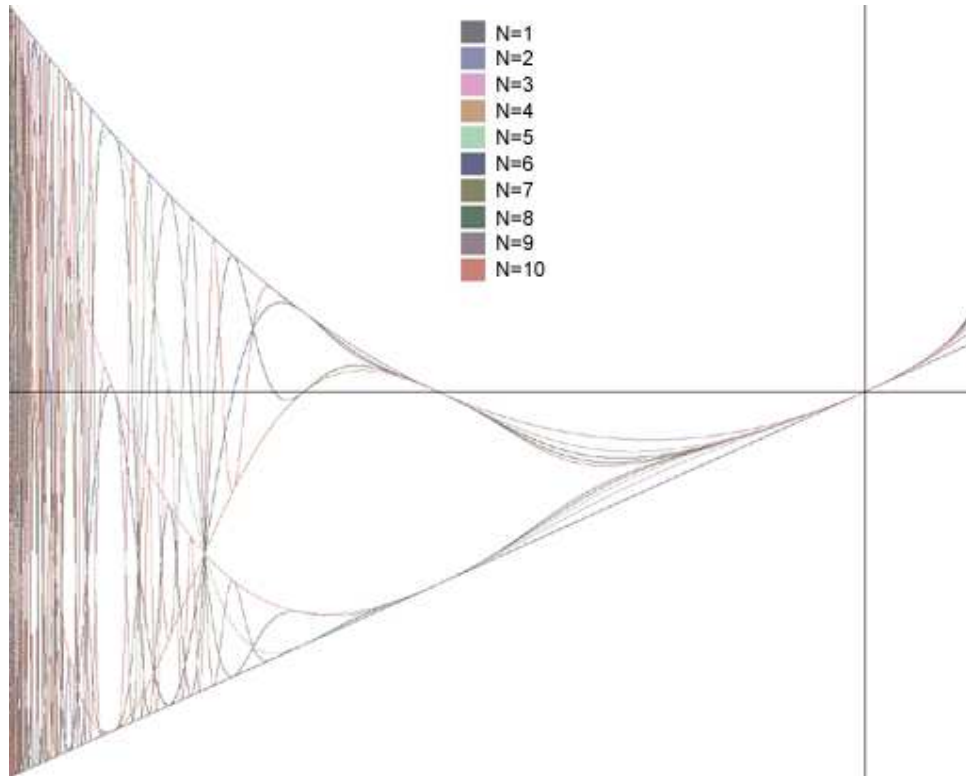


Figura 6.6

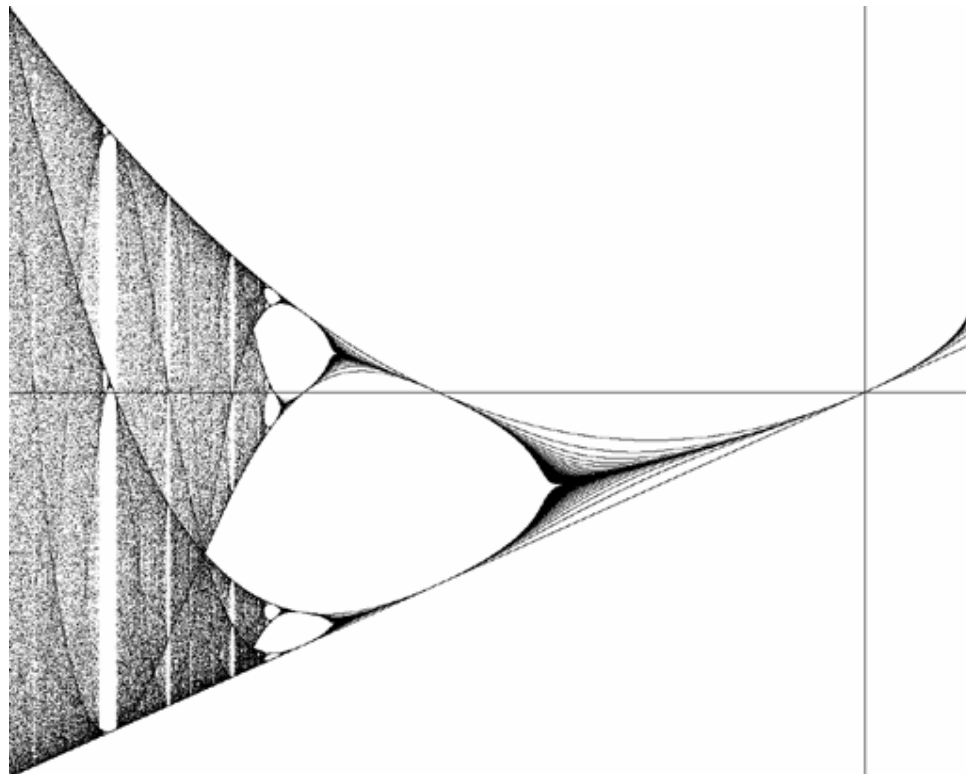


Figura 6.7

La familia de polinomios tiene un extraordinario parecido con la ecuación logística. Sin embargo, este parecido no es casual. Después de todo la ecuación logística presenta los valores de cada una de las órbitas asociadas a cada valor "a". Y nuestros polinomios representan el N-ésimo valor de la secuencia generada. Si tal secuencia converge a la órbita periódica correspondiente en menos de N iteraciones, entonces el polinomio  $P_N(C)$  evaluado para esa "a" ( $C=a$ ) estará pasando por uno de los N puntos del diagrama de la ecuación logística asociados a esa "a". En el caso extremo de que coincida con la posición del centro de uno de los bulbos, entonces tanto la ecuación logística como evidentemente el polinomio cortarán al eje en ese punto. Para el caso más general en el que la secuencia  $x_i$  tarda más de N iteraciones en converger a la órbita periódica formada por los puntos  $x_{pi}$ , entonces el polinomio tan sólo se acercará a la ecuación logística, sin lograr superponerse a ella completamente. Claro está, no obstante, que cuanto menos tarde la órbita en converger, tanto más se acercará el polinomio a la "sombra" de la ecuación logística. Como ya sabemos, a menor distancia del centro de un bulbo, mayor velocidad de convergencia.

Esta descripción queda bien reflejada en la figura siguiente:

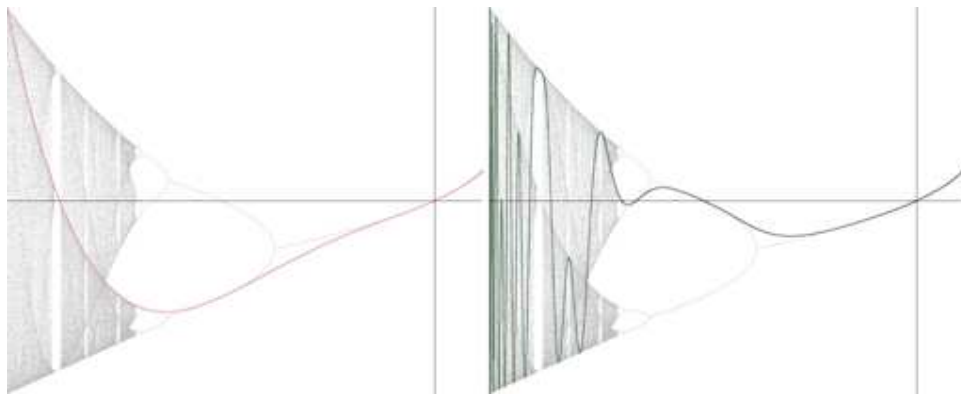


Figura 6.8

En el dibujo izquierdo se ha superpuesto  $P_3(C)$  a la ecuación logística, y a la derecha  $P_8(C)$ . Vemos como ambas tienden a seguir la sombra de aquella, siendo su distancia máxima en aquellos puntos "más alejados" de los centros de los bulbos, que son, claro está, los puntos de tangencia entre ellos, es decir, los puntos en los que la ecuación logística se bifurca.

Por otra parte, es claro que cuanto mayor sea el orden N del polinomio más se acercará el mismo a la ecuación logística incluso en los puntos más desfavorables como los antes descritos. Efectivamente, al ser mayor N,  $P_N$  estará representando puntos más alejados en la secuencia, con lo que más se parecerán éstos a la órbita periódica, si es que no forman parte de ella ya.

#### 6.4. Los caminos de P sobre la ecuación logística

Sabemos que los  $P_N$  tienden a avanzar "por encima" de la ecuación logística, especialmente para N grandes. ¿Pero cómo lo hacen? Puesto que  $P_N$  es un polinomio, tan sólo puede tener un valor para cada C ("a"), mientras que el diagrama de bifurcación tiene N puntos para cada una de las abscisas, según ésta corresponda a una  $f_c$  de período N. Por tanto, el polinomio tan sólo podrá pasar, o mejor dicho, sólo podrá "tender" a pasar por una de tales N alternativas. Así, en las cercanías de los puntos de bifurcación, es decir, cerca de los puntos de tangencia entre los bulbos, el polinomio deberá "optar" por tender hacia uno u otro camino.

Para expresar esta idea fijémonos de nuevo en la figura 6.8. Avanzando de derecha a izquierda, es decir, de 0 a  $-2$ , observamos como al llegar al primer punto de bifurcación  $P_3$  eligió el camino "de abajo", mientras que  $P_8$  eligió el "de arriba", para después, en la segunda bifurcación elegir "el de abajo".

Cada polinomio elige uno de los infinitos caminos existentes hasta llegar a " $a$ "= $-2$ . Eso sí, todos, excepto  $P_1$ , alcanzan el punto extremo con un valor igual a " $2$ ", como es bien fácil comprobar, puesto que

$$\begin{cases} P_N(-2) = f_{-2}^N(0) = 2 \\ P_1(-2) = f_{-2}^1(0) = -2 \end{cases}$$

La forma en que los polinomios se distribuyen a lo largo de los infinitos caminos posibles depende de  $N$ . Realizando pruebas, parece ser que, al menos en las primeras bifurcaciones, los polinomios se van distribuyendo alternativamente entre las dos opciones que ofrece cada bifurcación a medida que aumenta  $N$ .

Por ejemplo, en la primera bifurcación todos los polinomios de grado par siguen la rama superior de la bifurcación, mientras que los impares siguen la inferior. A su vez, el "flujo" de polinomios que entra en cada una de estas dos ramas se vuelve a dividir alternativamente en las siguientes bifurcaciones correspondientes a ambas ramas, y así para el resto de las bifurcaciones.

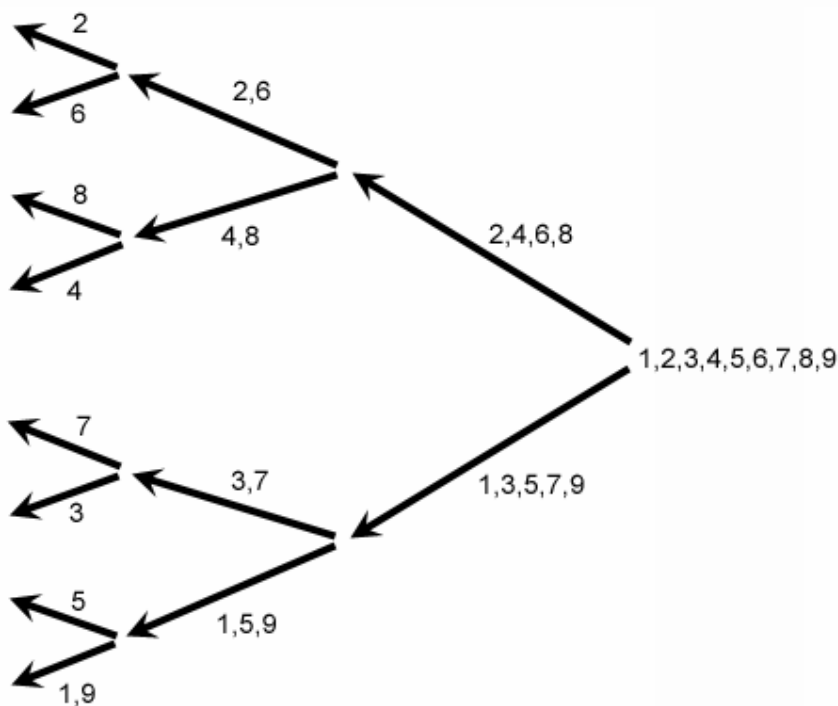


Figura 6.9

Evidentemente esta situación no puede esperarse que continúe indefinidamente, puesto que sabemos, que más allá de estas primeras bifurcaciones existen puntos de  $N=3$ , lo cual rompe completamente el esquema. En aquel punto los polinomios se redistribuyen en tríos.



### 6.5. Algo más sobre los polinomios $P$

Tal vez sea este punto el más adecuado para hacer resaltar una propiedad de los polinomios  $P$  que hasta ahora no hemos mencionado. Se comprueba que a medida que el grado del polinomio aumenta, el número de términos en  $C$  se duplica repitiéndose los últimos  $N$  términos del polinomio  $P_N$  en el  $P_{N+1}$ . Es decir, a medida que  $N$  aumenta los polinomios tienden a fijar sus términos a los valores de una secuencia bien definida. Así, si expresamos  $P_N$  como

$$P_N(C) = \sum_{i=1}^{2^M-1} a_i^n C^i$$

resulta que

$$a_i^\infty = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16795, 58786, \dots\}$$

## 7. DEMOSTRACIONES DEL BULBO N=1

El bulbo N=1 ha sido objeto de mayor estudio que cualquier otra parte del conjunto de Mandelbrot. Debido a que, como vimos, su contorno es sencillo de parametrizar y puesto que el caso N=1 siempre facilita los cálculos derivados de intentar deducir alguna propiedad acerca de M, se hace difícil resistir la tentación de investigar sus propiedades. Sin embargo, toda la información que consiguiésemos obtener acerca de él siempre sería despreciable en comparación con la cantidad de información que contiene la infinidad del conjunto entero. Fijarse tan sólo en el bulbo N=1 y escudriñar sus misterios posiblemente sea como esforzarse en obtener la máxima información acerca del ojo de un tipo de mosca concreta con la esperanza de así estar haciendo zoología. O tal vez el intento merezca la pena si se demuestra que algo de lo descubierto puede generalizarse a otros bulbos.

En cualquier caso, un tema que atrae la atención es sin duda la distribución de los bulbos tangentes al bulbo N=1. Los períodos de los bulbos, sus puntos de tangencia, los tamaños de los aparentes discos, su disposición parecen a simple vista obedecer leyes sencillas.

### 7.1. Demostración de la relación entre Z y C<sub>1</sub>

Es fácil demostrar que existe una relación directa entre el valor al que converge la órbita periódica de N=1 y el punto de la curva C<sub>1</sub> que genera la secuencia. Efectivamente, puesto que la secuencia es convergente, se puede obtener el valor del punto fijo haciendo

$$\begin{aligned} Z &= Z^2 + C \\ Z^2 - Z + C &= 0 \\ Z &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C}}{2} \end{aligned}$$

siendo, como sabemos,

$$C = \frac{1}{2}e^{j\Phi} - \frac{1}{4}e^{j2\Phi}$$

luego

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2e^{j\Phi} + e^{j\Phi}}}{2} \\ Z &= \frac{1 \pm \sqrt{(1 - e^{j\Phi})^2}}{2} \\ Z &= \frac{1 \pm (1 - e^{j\Phi})}{2} \\ Z &= \begin{cases} \frac{2 - e^{j\Phi}}{2} \\ \frac{e^{j\Phi}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

De estas dos soluciones sólo la segunda tiene módulo igual a 1/2, que por el teorema de los bulbos sabemos debe tener. Por tanto, si C pertenece al límite del bulbo N=1 siendo  $\phi$  el valor

que parametriza su posición en  $C_{11}$ , entonces la secuencia generada converge a un valor de la forma  $\frac{1}{2} \cdot e^{j\phi}$ .

$$C = C_{11}(\Phi) \Rightarrow Z = \frac{1}{2} e^{j\Phi}$$

## 7.2. Observación de los puntos de tangencia $C_{11N}$

En cuanto a los puntos de tangencia, en el capítulo 4 demostramos que los puntos de tangencia de los bulbos  $N=2$  y  $N=3$  eran respectivamente:

$$C_{i12} = -\frac{3}{4}$$

$$C_{i13} = \frac{-1 \pm j3\sqrt{3}}{8}$$

que por supuesto pertenecen a  $C_{11}(\phi)$ , y que, como también vimos, corresponden a los puntos

$$\Phi_2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Phi_3 = 2\pi \cdot \frac{1}{3}, 2\pi \cdot \frac{2}{3}$$

No se presentará en este trabajo como tema de investigación, sino como de observación el hecho de que se compruebe que los puntos de tangencia de cualquier bulbo de período  $N$  con el bulbo  $N=1$  viene dado por la curva  $C_{11}(\phi)$  para un valor tal que

$$\Phi_N = 2\pi \cdot \frac{n}{N}$$

siendo  $n$  un número divisor de  $N$  tal que la fracción  $n/N$  no sea simplificable. Por ejemplo, para  $N=3$  se tienen los dos bulbos de  $N=3$  situados, como se ha visto, a  $1/3$  y  $2/3$  del recorrido de la curva  $C_{11}$ . Para  $N=2$ , el único bulbo está a  $1/2$  del recorrido, como ya hemos demostrado. De la misma manera, se puede comprobar que existen dos bulbos de  $N=4$  tangentes al  $N=1$  y cuatro de  $N=5$  en exactamente los puntos

$$N = 4 \Rightarrow \begin{cases} C_{11}(2\pi \frac{1}{4}) \\ C_{11}(2\pi \frac{3}{4}) \end{cases}$$

$$N = 5 \Rightarrow \begin{cases} C_{11}(2\pi \frac{1}{5}) \\ C_{11}(2\pi \frac{2}{5}) \\ C_{11}(2\pi \frac{3}{5}) \\ C_{11}(2\pi \frac{4}{5}) \end{cases}$$

Por otra parte, el numerador  $n$  parece tener cierto sentido matemático. Representa el "salto" que toman los puntos sucesivos en la órbita periódica si ordenamos dichos puntos en sentido horario. La figura 7.1 ilustra lo que se pretende decir:

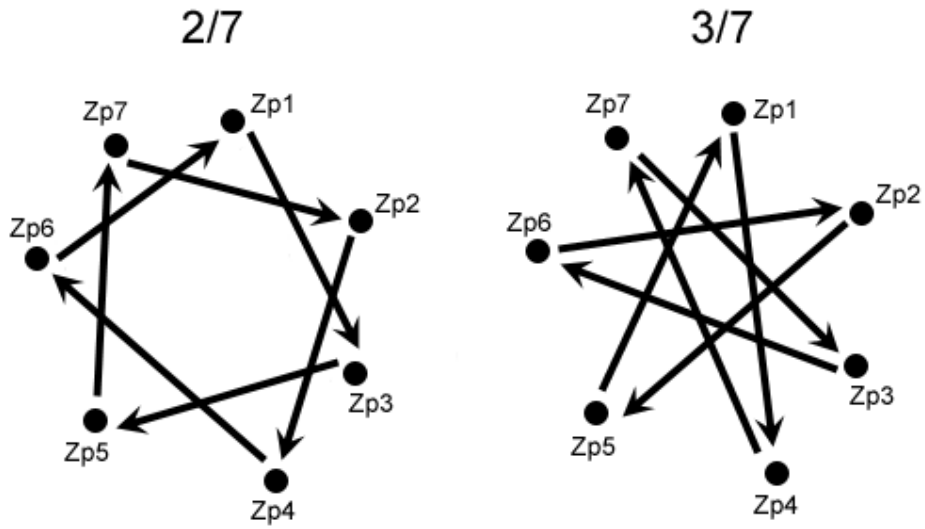


Figura 7.1

## 8. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado una labor de investigación experimental y búsqueda teórica de la geometría del conjunto de Mandelbrot a partir de la dinámica subyacente. A modo de resumen, podemos decir que este trabajo ha realizado las siguientes labores de investigación:

- **Demostración** de que "M es par"
- **Definición** de la dinámica en los bulbos
- **Descubrimiento y demostración** del "Teorema de los bulbos"
- **Aplicación** del teorema para demostrar la geometría de los bulbos  $N=1, 2$  y  $3$ .
- **Definición** de "centro de un bulbo"
- **Definición** de "polinomios P y Q"
- **Demostración** de un "método para hallar los centros de los bulbos mediante los polinomios Q"
- **Descubrimiento y demostración** de una "fórmula para calcular el número de bulbos de período N"
- **Aplicación** del método de los polinomios Q para demostrar la geometría de los bulbos  $N=1, 2, 3$  y  $4$
- **Definición** de un "método para hallar un boceto de los centros de los bulbos"
- **Descubrimiento** de la "relación entre los polinomios P y la ecuación logística"
- **Descubrimiento** de los "caminos de los polinomio P sobre la ecuación logística"
- **Descubrimiento** de la "forma de  $P_N$  cuando N tiende a infinito"
- **Demostración** de la "relación entre el punto de convergencia y el punto C de  $C_{11}$ "
- **Descubrimiento** de la "relación de los puntos de tangencia con  $C_{11}$ "

## 9. REFERENCIAS

- [1] James Gleick, "Caos - la creación de una ciencia", *ISBN: 84-322-9585-X, 1988.*
- [2] Tan Lei, "Ressemblance entre l'ensemble de Mandelbrot et l'ensemble de Julia au voisinage d'un point de Misiurewicz," p. 139-152 in Douady, A., and Hubbard, J., "Etude dynamique des polynomes complexes II," *Publ. Math. Orsay* 1985.
- [3] Mitsuhiro Shishikura, "The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets,". *Annals of Mathematics* 147 (1998), 225-267.
- [4] Mitsuhiro Shishikura, "The Boundary of the Mandelbrot Set has Hausdorff Dimension Two", *Tokyo Institute of Technology, Mathematics Subject Classification. Primary 58F23; Secondary:30D05, 1991*
- [5] Peitgen Heinz-Otto and Peter H.Richter, "The Beauty of Fractals". *Springer-Verlag, 1986.*
- [6] G.Benetti, L.Galgani, A.Giorgilli and J.M.Strelycn, "Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: Theory". *Meccanica* 15, 1980.
- [7] Paul Bourke, "Random Attractors Found using Lyapunov Exponents". <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/lyapunov/>, 2001.
- [8] Mitchell feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems". *Los Alamos Science* 1, 1981.
- [9] Mitchell feigenbaum, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations". *Journal of Statistical Physics* 21, 1979.
- [10] A.N.Sarkovskii, "Coexistencia de ciclos de un diagrama continuo de una sola línea en sí mismo". *Ukrainian Mathematics Journal* 16, 1964.